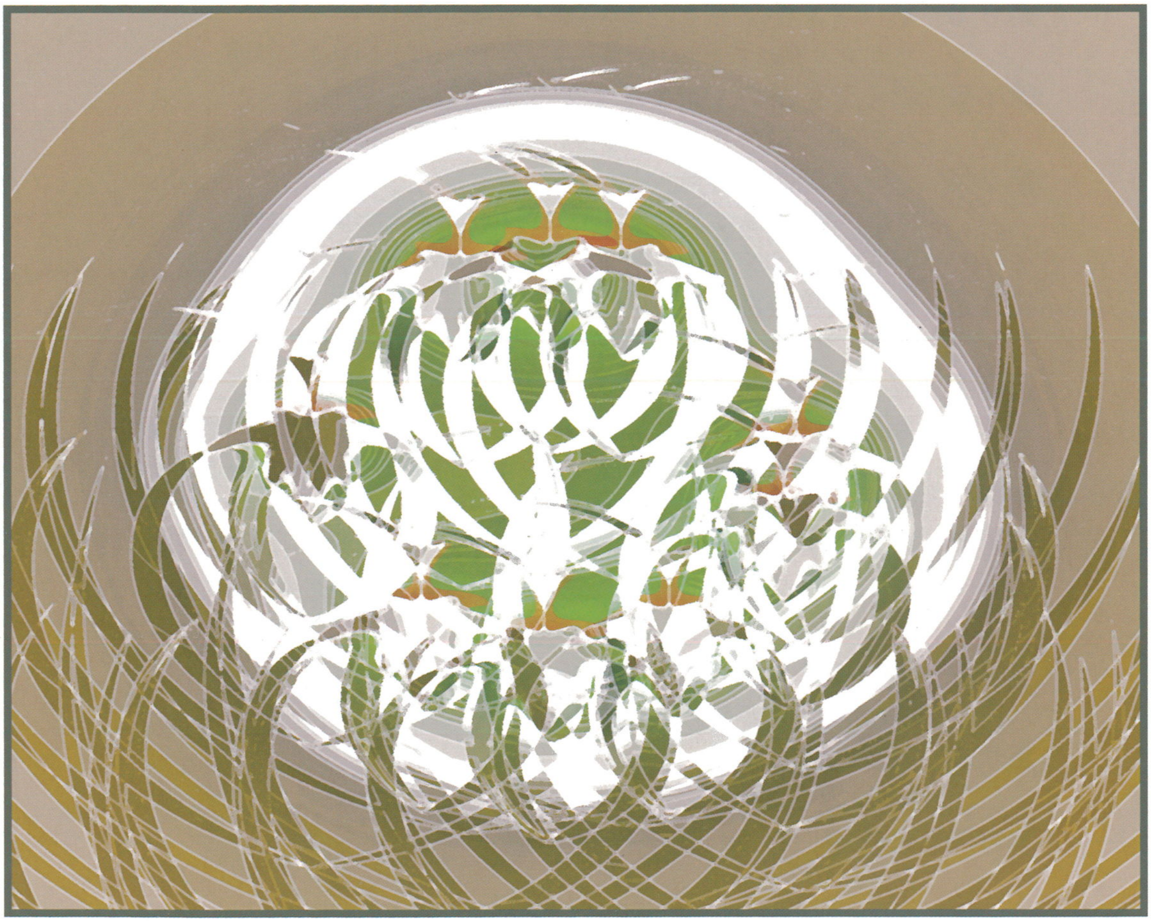
昭和38年7月2日第3種郵便物認可
2012年2月1日発行　第50巻2号　毎月1回1日発行
ISSN 0386—2240

数理科学

2
2012

特集 古典のススメ［物理編］
新しい発想のヒントを探る



No.584
サイエンス社

MATHEMATICAL SCIENCES
Number 584 February 2012

古典のススメ［物理編］

新しい発想のヒントを探る

表紙：戸川　隼人

お得な定期購読をおすすめします

毎号確実に御手元へ

地域によって書店店頭に陳列されない場合があります．**郵送料小社負担**にて確実に御手元へ届く定期予約購読をおすすめします．

予約購読は１年間（本誌のみ）11,000 円，半年間（本誌のみ）5,500 円．（税込み価格）

造本コストは更に上昇気味です．小社としてもあらゆる努力をもって廉価で提供してゆきたいと思っておりますが，定価改定の止むなき事態がかんがえられます．この場合予約購読期間中のものにつきましては料金据置きとなります．なお，臨時別冊のご注文については，本誌予約購読者の方には，商品到着後のお支払いにて承ります．

お申し込みは本誌とじ込みの振替用紙を御利用下さい．

数理科学特集一覧

63 年/7～2008 年/11 省略
2008 年/12 確率論的物理観
2009 年/1 グラフィックでわかる物理
/2 発展する量子力学
/3 方程式に潜む対称性
/4 現代数学はいかに使われているか［幾何編］
別冊　代数学の魅力
/5 微積分を楽しむ
/6 現象と物理概念を結ぶ方程式
/7 現代物理の世界像
/8 複素数
/9 シュレーディンガー
/10 数学と物理に広がる不変量
別冊　量子重力理論
/11 可積分系の世界
/12《原理》の探求
2010 年/1 無限次元の魅力
/2 数学の可視化
/3 物理数学の効用
/4 現代数学はいかに使われているか［確率編］
別冊　現代幾何学の発展
/5 物理学事始め
/6 現代幾何と方程式
/7 物理学と行列
/8 力の統一にむけて
/9 南部陽一郎
/10 曲面の不思議
/11 連続から離散へ
/12 物理における《破れ》と調和
2011 年/1 数論の探求
/2 物理現象を読み解く数学的手法
/3 方程式と現代代数学
/4 物理学と多様体
/5 初学者を悩ます数理の概念
/6 物理イメージと数式表現
/7〈隠れた〉物理法則
/8 計算が拓く数学と物理の世界
/9 オイラー
/10 時空と熱力学
/11 線形から非線形へ
/12 物理と仮説
2012 年/1 数学から物理へ，物理から数学へ

数理科学臨時別冊一覧

10 年/11 重点解説 ベクトル・テンソル
10 年/12 行列解析の基礎
11 年/1 超弦理論の基礎
11 年/3 繰りこみ群の物理と数理
11 年/4 超重力理論
11 年/6 共形場理論
11 年/9 演習形式で学ぶ 相転移・臨界現象
11 年/10 実例で学ぶ 精度保証付き数値計算
11 年/11 リーマン予想の数理物理
11 年/12 量子多体系の物理
12 年/1 現象から方程式を創り出す

「数理科学」のバックナンバーは下記の書店・生協の自然科学書売場で特別販売しております

紀伊國屋書店本店（新宿）
紀伊國屋書店新宿南店
あおい書店中野本店
オリオン書房ノルテ店（立川）
くまざわ書店本店（八王子）
くまざわ書店桜ヶ丘店（多摩）
書泉グランデ（神田）
書泉ブックタワー（秋葉原）
三省堂本店（神田）
リブロ池袋店
ジュンク堂書店（池袋）
ジュンク堂書店（新宿）
芳林堂（高田馬場）
MARUZEN & ジュンク堂渋谷店
八重洲ブックセンター（東京駅前）
丸善丸の内本店（東京駅前）
丸善日本橋店
丸善多摩センター店
ジュンク堂書店吉祥寺店
ブックファースト青葉台店（横浜）
有隣堂イセザキ町本店（横浜）
有隣堂西口・東口（横浜）
有隣堂厚木店（厚木）
ジュンク堂書店（盛岡）
丸善津田沼店
ジュンク堂書店（新潟）
戸田書店静岡本店
ジュンク堂大阪本店
紀伊國屋書店梅田店（大阪）
旭屋本店（大阪）
アバンティブックセンター（京都）
ジュンク堂書店（京都）
ジュンク堂京都 BAL 店
ジュンク堂書店（神戸）
ジュンク堂書店三宮店
ジュンク堂三宮駅前店（神戸）
ジュンク堂書店（大分）
喜久屋書店倉敷店
MARUZEN & ジュンク堂広島店
紀伊國屋書店福岡本店
ジュンク堂福岡店
丸善博多店
ジュンク堂鹿児島店
紀伊國屋書店新潟店
ジュンク堂書店旭川店
金港堂（仙台）
金港堂パーク店（仙台）
ジュンク堂書店（仙台）
ジュンク堂書店（秋田）
ジュンク堂書店郡山店
鹿島ブックセンター（いわき）
友朋堂（つくば）

――大学生協・売店――

東京大学 本郷・駒場
東京工業大学 大岡山・長津田
東京理科大学 新宿
早稲田大学 理工学部
慶応義塾大学 矢上台
福井大学
筑波大学 大学会館書籍部 第一学群書籍部
埼玉大学
名古屋工業大学・愛知教育大学
大阪大学・神戸大学 ランス
京都大学・九州工業大学
東北大学 理薬・工学
室蘭工業大学
徳島大学 常三島
愛媛大学 城北
山形大学 小白川
島根大学
学習院大学 成文堂
北海道大学 クラーク店
熊本大学
名古屋大学
広島大学（北１店）
九州大学（理系）

February 2012 MATHEMATICAL SCIENCES Number 584

特集／古典のススメ［物理編］

古典を読もう

江 沢　洋

1. なぜ古典か

かつて朝永振一郎先生は，有名な『量子力学 (1)』（みすず書房）の序文にこう書かれた：

> 理論物理学者の仕事は大別すると二つになる．一つは出来上がった理論を未だ理論的に解決されていない問題に適用して現象の由来を明らかにすることであり，今一つは新しい理論を作り上げることである．この後の仕事は，第一の仕事に劣らず重要であるが，その場合，研究者を導くのに過去においてそういう仕事が如何にして行なわれたかという例が非常に役に立つであろう．

こんどの特集「古典のススメ［物理編］」も同じ考えに立っている．光をあてたいと思うのは，朝永先生の言う理論物理学者の二つの仕事のうち後のもの，それも過去の物理学者たちが，当時は新しかった理論を如何にして作り上げたか，である．そして，その上に，そうしてできた理論が現代の物理学に示唆するものがとりだせれば，なおうれしい．

読者としては，新しい理論を作ろうとしている研究者だけでなく，もっと広く，物理学を学んでいる人，これから学ぼうと思っている人を考えている．もっと，もっと広く，物理学とはどういうものか知りたいと思っている人をも含めたい．

2. 古典に学ぶ

物理の研究者に限らず，古典から得られるものは多いと思う．

第一に，かつては新しかった理論の中核をなす諸概念が如何にして生まれたか，諸法則がいかにして発見されたかを知ることは，それら諸概念・諸法則のより深い理解につながるであろう．それら諸概念は，はじめから今のようにすっきりと定義されていたわけではない．たとえば，慣性にしても，アリストテレスの物理学では運動は力を加えて初めて維持されるものだったし，ガリレオが考えた慣性は地球をまわる円軌道上の定常運動を意味していたかもしれない．ニュートンは如何にして等速直線運動の慣性に達したのか？ それは彼の『プリンシピア』を一通り読んでも分からない．それを知るには，少なくとも『プリンシピア』を深読みする必要がある．

第二に，諸概念・諸法則の深い理解と相まって，それらのリアリティが増すということがある．「新しい概念ないしは法則を受け容れる，受け容れないの抗争の歴史をたどることで，新しい概念や法則が身近に感じられるようになる」と言ってもよかろう．たとえば，特殊相対性原理にいう「光速一定」は誰しも初めは受け入れがたいと思う．マ

イケルソンにしても，自身の実験結果を疑わずにはいられなかった．ローレンツは，あくまで静止エーテルにこだわった．

そうした抵抗を振り切って新しい法則を認めたという選択は本当に正しかったのかという問題への答えを遡ってさがすのが，古典を読む際の第三の課題である．ひいては，真理は一つか，真の物理学の体系は一つしかないのか，という問題にもなる．素粒子論のクォーク模型は，考えようによってはよほど奇妙なものである．他にもっとまっとうな理論はないのか？ そもそも今日の素粒子論の発展は，かつての物理学の発展に比べて速すぎるのではないか？ 電子がその姿を垣間見せてから，その存在が受容されるまで，そして量子力学的な本性が捉えられるまでに何年かかったか？

そう言えば，量子力学だって奇妙なものだ．どこかで一歩，道を誤ったために迷路に迷い込んだということはないか？ 確かに量子力学は，自然に強要されて一歩一歩つくりあげてきた．ほかに道はなかったようにも見えるが，その一歩一歩は論理の必然というよりも「思いつき」に依存したところもあったのではないだろうか？ しかし，その思いつきは何度もの試行錯誤の末のもので，またそれまでの理論の歴史を背負ったものだから，かなりの必然性をもっていたともいえるだろう．

3. 古典の限界

ニュートンの『プリンシピア』は幾何学の言葉で書かれており，微分積分の思想は入っているが計算には使われていない．マクスウェルの『電磁気学』には，いわゆるマクスウェルの方程式は登場しない．登場するのは，もっと従属変数の多い連立方程式である．これらは，しかし古典の限界というほどのものではないだろう．

物理学は 20 世紀に大きな革命を経験した．それならば，古典など顧みる必要はない，という人がいたら，大間違いである．

革命後の新物理学は，確かに今日では整った体系に組み上げられ自立している．しかし，古い物理学から多くを受け継いでいるのだ．巨視的な世界を見て形作られた諸概念が，ある意味でそのまま微視的な世界に通用するのはおどろきでもあるが，事実である．

われわれは巨視的世界に生きているので，その世界に現れる諸現象を見て直観をつくってきたので，微視的世界の諸現象もまずはそこに投影して理解しようとした．そして，それではすませることができなくて，自然に強要されて理解を変えてゆく．その果てに物理学の革命があったわけだが，その後にも古い物理学の面影がちらちらしている．それが自然の構造なのだと言わざるを得ないような状況がある．

そうであるならば，自然の理解は歴史的ならざるを得ない．

一時は，電子の位置や運動量は観測できないのだから物理学から追放すべきだと言われたこともある．しかし，量子力学が完成してみると，電子の位置や運動量は中核的な位置にデンと座っている．その概念は，古典物理学におけるものとは違っており，互いに非可換な演算子で表わされる．それはその通りだが，新しい概念が古典的な意味づけをまったく離れて理解できるかといえば，そうではない．量子力学的な観測という新しい窓を通して古典物理学の位置や運動量の概念がのぞいている．量子力学的な状態の記述にも位置や運動量など古典物理学の諸概念が使われる．

エネルギーは，量子力学的なものも，もっと直接的に古典世界のものに結びついている．水素原子と酸素原子の結合エネルギーは単にアヴォガドロ数をかけるだけで巨視的世界の燃焼熱になる．

いや，相対性理論の世界に行くとエネルギーと質量は「同じもの」の異なる側面となって，古典物理学とはちがう顔を見せる．電場と磁場にしても同じである．

こうした新しい顔は，エネルギーと質量の同一性のように古典物理学では見られなかったものもあるが，電場と磁場の関係のように，そうと知ってから場を見れば古典世界にもその影がさしてい

たことに気づくものもある．

自然の構造は微妙である．それだけに，現代物理の世界像と古典物理の世界像を対比してみたくなるのである．

4. 古典の味わい

ここまでは古典から得られるものを強調してきた．しかし，一つの達成として古典を味わうという立場も，もちろん可能である．そこには先人たちの苦闘の跡が刻まれ，統一された理論像を組み上げる著者の努力の結晶がある．味わい深くないことがあろうか？

古典から問題を出されることもある．Einsteinは彼の相対性理論の公理に①真空中の光の速さと②物理の基本法則とが慣性系によらないこと，を入れた．しかし，Maxwellの方程式から真空中の光の速さは定まってしまうから，この方程式を物理の基本法則に含めれば①は②から導かれることになる．

どうしようか？ 一つの道は，①を「速さには慣性系によらない上限 $c_{\max}$ がある」という公理に変えることである．この公理から，時計合わせを上限の速さをもつものの交換で行なう約束の下でだが，Lorentz変換の式は導ける．ただし，その式には通常の光速 c に代えて $c_{\max}$ が入っている．この変換に関して②の一部として真空中のMaxwell方程式が共変であることを要請すれば $c_{\max} = c$ がでてくる！ その上で②をみたすように力学を作り直せば，力学の世界でも速さは $c_{\max}$ を超えないことがでるから，力学が公理①もみたすことがわかる．

このように古典の中に問題をみつけることも古典の楽しみ方の一つである．

5. 日本の物理学史

今回は日本の科学史は取り上げなかった．しかし，忘れたくない．ここでは趣向を変えて，思いつくままに日本の物理学史に関する文献をあげてみよう．

『日本科学古典全書』第一巻，朝日新聞社 (1978).

『近世日本科学史と麻田剛立』，渡辺敏夫著，(1983).

『大江戸視覚革命』，T. スクリーチ著，田中優子・高山宏訳，作品社 (1998).

『日本科学古典全書』第六巻，朝日新聞社 (1942).

『幕末の洋学』，中山茂編，ミネルヴァ書房 (1984).

『科学史』，石原純著，東洋経済新報社 (1942).

『田中館愛橘先生』，中村清二著，中央公論社 (1943).

『長岡半太郎伝』，板倉聖宣ほか著，朝日新聞社 (1973).

『本多光太郎』，平林眞編，アグネ技術センター (2004).

『寺田寅彦』，矢島祐利著，岩波書店 (1949).

『日本の物理学史』上・下，日本物理学会編，東海大学出版会 (1978).

『科学の社会史』，広重徹著，中央公論社 (1973).

『評伝・石原 純』，西尾成子著，岩波書店 (2011).

『仁科芳雄往復書簡集』I，II，III，補巻，中根良平ほか編，みすず書房 (2006, 2011).

『論文に見る日本の科学 50 年』，青本和彦ほか編，岩波書店 (1980).

『中谷宇吉郎』，藤岡由夫著，雷鳥社 (1968).

『日本の科学思想』，辻哲夫著，中央公論社 (1982).

湯川秀樹著『旅人』，角川書店 (1960).

『回想の朝永振一郎』，松井巻之助編，みすず書房 (1980).

木村一治著『核と共に 50 年』，築地書房 (1990).

伏見康治著『時代の証言』，同文書院 (1989)；『アラジンの灯は消えたか？』，日本評論社 (1996).

『坂田昌一の生涯』，西谷正著，鳥影社 (2011).

＋

この特集が読者それぞれの要求に応えることを願っている．

（えざわ・ひろし，学習院大学名誉教授）

今，力学から何を学ぶか

高木　隆司

1. はしがき

私たちが高等学校や大学で力学を学ぶとき，だいたい次のような筋書きに従っている．まず座標系を導入し，座標を用いて物体の位置を表し，速度と加速度を定義する．これらをもとに，ニュートンの名を挙げながら慣性の法則，運動の法則，および作用反作用の法則を学ぶ．

このとき，これらの法則が一体何を表すのか，あるいはこれがなぜ成り立つのかを問う人は少ないであろう．なぜなら，日常見慣れている現象なので直感的に受け入れやすいし，まさか間違ったことを教えるはずがないと思うからだろう．これらの法則を納得したら，次は応用問題を解く段階に移る．それがうまく解ければ，力学はマスターしたと実感する．

物理学，あるいはその応用分野に進もうとする学生は，基礎課程でまず力学を学ぶ．その理由は，力学という学問体系がどの分野においても**基礎的な素養**という役割を担っているからであろう．確かに，天体運動などの力学現象の考察は17世紀以降の近代科学を発達させたし，直感的に理解しやすい物体の運動を例にとると，数学を含む理論体系と自然現象の関連が容易に把握できる．

筆者は，古典を参照しながら力学に関わる科学史を見ていくならば，上記の素養に加えて別の重要な役割が期待できるように思う．例えば，理工系の研究者が困難な問題に遭遇し，何か新しいアイデアや**発想の転換**の必要性を感じたとしよう．しかし，多くの人は発想の転換というものに慣れていないので，すぐには解決の糸口をつかめないであろう．発想の転換をするにも，やはりトレーニングが必要なのである．このとき，力学の古典の中に，そのためのよい教材が見つかることがある．古典は，学問が発達した当時の様子を知るということに加えて，現代における問題解決にも活かすことができると期待されるのである．

以下の節で，近代初期に著されたいくつかの古典を取り上げ，その中に発想の転換の種を探ることにしよう．その順序は時間をさかのぼるように配置する．

2. 力とは何か

筆者が担当した大学の基礎物理学の授業で，最初の時間に学生に対してアンケートを行い，物理学は好きかどうか聞いてみた．その中に，「力という概念が分からなくて，好きになれなかった」という回答があった．もしかしたら，この学生は物理学の鋭いセンスをもっていたのかもしれない．ここで，力の定義を求めて古典をのぞいてみよう．

アイザック・ニュートン：『自然哲学の数学的諸原理』（通称『プリンキピア』，1687年刊行）より[1)]

定義 I　物質量とは物質の密度と大きさ（体積）

とをかけて得られる，物質の測度である．
（途中略）
定義 IV 外力とは，物体の状態を，静止していようと，直線上を一様に動いていようと，変えるために，物体に及ぼされる作用である．
（途中略）
法則 I すべて物体は，その静止の状態を，あるいは直線上の一様な状態を，外力によってその状態を変えられないかぎり，そのまま続ける．
（途中略）
法則 II 運動の変化は，及ぼされる起動力に比例し，その力が及ぼされる直線の方向に行われる．
（途中略）
法則 III 作用に対し反作用は常に逆向きで相等しいこと．あるいは，二物体の相互の作用は常に相等しく逆向きであること．

なお，和訳文の重要語句についているラテン語を表すルビは省略した．「途中略」と記したところには，他の定義や法則の説明が入る．

これらの定義や法則を見ると，不審な点に気がつく．第一に，物質量（質量）を密度と体積の積で定義しているが，密度の定義はない．密度は物質によって決まった値として，自明な概念と見なしたのであろうか．第二に，定義 IV と法則 I とは，実は同じことを述べている．運動状態を変えるものが外力であるから（定義 IV），外力がなければ運動状態を変えない（法則 I）のは当り前であり，これらを独立に述べる必要はない．これらの点に不審があるものの，ニュートンが提唱した法則は自然の本質を言い当てていて，近代科学の発達に大きな貢献をした．

現代の教科書では，質量も外力も自明な量と見なしていて，上記の法則 I, II, III とほぼ同じ内容を記している．『プリンキピア』を読むことによって，私たちは質量や外力の明確な定義をしないままで運動の法則を理解していたのだということがはっきりしたと言える．定義を考えようとすると発想の転換が必要になる．

筆者は，ある力学の教科書[2)] に触発され，それに第 3 法則の意味を追加して運動法則の新しい解釈を行った[3)]．それを以下に示そう．

第 1 法則：他の物体から十分離れている物体が等速度運動をしていると判断されるような座標系を慣性座標系と呼ぶ．

第 1 法則では，**慣性座標系**という座標系の定義が述べられる．「力を受けない」という代わりに，「他の物体から十分離れた」と言うことによって，力の定義を避けた．実は，第 1 法則の記述は，「物体同士が遠く離れると互いに影響を及ぼさない」という経験事実に基づいているので，第 1 法則の本質は「慣性座標系が存在する」ということを主張する法則である．以下では，慣性座標系で運動を見ていく．

第 2 法則：物体どうしが近づいて互いに影響を及ぼすとき，それらの加速度は互いに逆方向を向き，その大きさの比は運動状態によらず一定である．

この法則から，物体の質量と相互の力を次のように定義する．いま，基準の物体（添え字 0 で表す）を任意に選び，その物体が固有の量 m_0 をもつと仮定する．この物体 0 と他の物体 1 が近づいたときの加速度ベクトルの大きさの比（定数）を $|\boldsymbol{a}_0/\boldsymbol{a}_1|$ とし，これに m_0 をかけたものを m_1 とする．すなわち，

$$m_1 = m_0\left|\frac{\boldsymbol{a}_0}{\boldsymbol{a}_1}\right|. \tag{1}$$

これが，物体 1 の固有の量である．他の物体についても（物体 2 とする），同じように基準物体に近づけて加速度を調べることにより，固有の量 m_2 が決まる．こうして，すべての物体の固有の量が決まり，これらを質量と呼ぶことにする．このように，質量とは基準物体に仮定した値との比で決まるものである．

次に，

$$\boldsymbol{f}_0 = m_0\boldsymbol{a}_0, \quad \boldsymbol{f}_1 = m_1\boldsymbol{a}_1 \tag{2}$$

によって，物体 0, 1 が受けた力と定義する．(1), および加速度が逆向きであることから $\boldsymbol{f}_0 = -\boldsymbol{f}_1$

である．すなわち，基準物体と他の物体の間に働く力については，上記の力の定義から作用反作用の法則が自動的に成り立つ．基準物体に近づく物体2についても，同様に $\boldsymbol{f}_0 = -\boldsymbol{f}_2$ が成り立つ．

第3法則：基準物体以外の物体1と物体2が近づいたとき，それぞれの加速度 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ は，すでに定義された質量 m_1, m_2 を含む次の式を満たす．

$$m_1\boldsymbol{a}_1 = -m_2\boldsymbol{a}_2. \tag{3}$$

この式の両辺が，物体1, 2が受けた力である．こうして一般的に力が定義され，**作用反作用の法則** $\boldsymbol{f}_1 = -\boldsymbol{f}_2$ が成り立つ．

ここで誤解がないように次のことを注意しておこう．第2法則の説明の中で出てきた $\boldsymbol{f}_0 = -\boldsymbol{f}_1$, $\boldsymbol{f}_0 = -\boldsymbol{f}_2$ からただちに $\boldsymbol{f}_1 = \boldsymbol{f}_2$ となり，上記の第3法則と符号が異なるという疑問が出るかもしれない．しかし，それは間違いである．この2つの $\boldsymbol{f}_0$ は，物体0が異なる時刻で物体1あるいは物体2に近づいたときに受けた力であり，同じ記号を使っているが，それらの大きさも向きも異なる（図1）．第3法則は，やはり経験事実に基づく独立した法則なのである．

以上から，ニュートンによって提唱された運動法則がより明確になった．筆者は，古典に接することによって，本質を問い直すきっかけを得たのである．

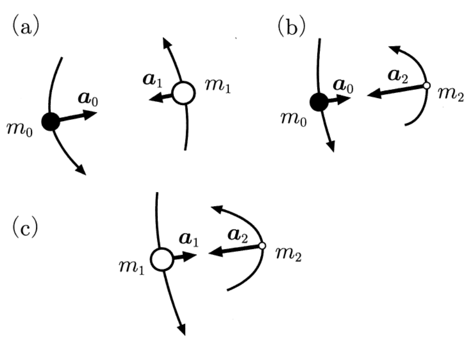


図1　(a) 物体0, 1の相互作用，(b) 物体0, 2の相互作用，(c) 物体1, 2の相互作用．(a), (b) から質量 m_1, m_2 が定義される．(c) から，経験法則として $m_1\boldsymbol{a}_1 = -m_2\boldsymbol{a}_2$ が導かれる．

3. 大型恐竜は首を水平に保つことができたか

ブロントザウルスなど，体長30 mを超す大型恐竜の復元図やアニメーションを見ると，長い首を水平に突き出して悠然と歩いたり立ったりしている．筆者には，昔からこれが不思議であった．実は，ガリレイが動物のサイズに関する議論をしている．

ガリレオ・ガリレイ：『新科学対話』（1634年刊行）より[4)]
サルヴィヤチ（途中略）さあ諸君，とくと御覧なさい．説明はまだ十分とは言えないが，それでも，一寸見た所ではありそうもない事実が，隠れ蓑を脱ぎ捨てて，赤裸々な混ざりっ気のない美しい姿で立ち現われたじゃありませんか．誰だって知らない人はないと思いますが，犬が3, 4キュービット（約1.5–2 m）の高さから落ちても猫が8または10キュービット（約4–5 m）の高さから落ちても怪我をしないのに，ウマは同じ位の高さから落ちれば骨を折ってしまいます．蟋蟀（コオロギ）が塔から落ちたって，蟻が月の世界から落ちて来たところでやっぱり怪我をしないでしょう．

『新科学対話』では，ヴェネチア市民サグレド，新しい科学者サルヴィヤチ，アリストテレス哲学に通じた学者シムプリチオの3人による対話という形で話が進む．この3人は，すべてガリレイの分身かも知れない．上記のサルヴィヤチの説明は，本書の最初のテーマである**サイズ効果**（同じ形・同じ物質でできているものでも，そのサイズによって異なる現象が起きること）の例として本書の始めに現れる．なお，旧漢字を現代の漢字に直し，なるべく新仮名づかいに改めた．

ガリレイは，小サイズの動物にできることが大サイズの動物にはできないことがある，ということを主張している．ここで，動物が細長い首を水平に保つ仕組みを考えてみよう（図2）．

首が受ける重力は，首のつけ根に生じる上向きの力と釣り合っている．この力は，骨格が受けもっ

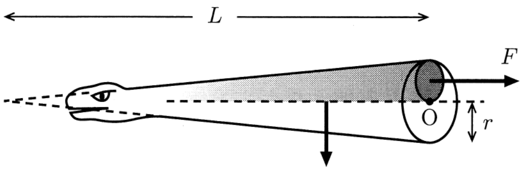


図 2　恐竜の首のモデル．斜線部分は靱帯を表す．

ているので無理はないであろう．一方，首の重力は首のつけ根（図 2 の O 点）の周りに力のモーメントを生み出す．首の骨は脊椎のつながりであり曲がりやすいので，首を水平に保つためには，首の内部を通っている靱帯を胴体の方向に常に引っ張らねばならない．靱帯がこの力に耐えられるかということが問題なのである．

ここで，恐竜の首が長さ L (m)，底面半径 r (m) の円錐であり，首のつけ根で上半分にある直径 r (m) の円形断面をもつ靱帯に水平方向の力 F (N) をかけることによって，重力 W (N) のモーメントと釣り合わせていると仮定しよう．

首の重心は O 点から $L/4$ のところにあるので，重力のモーメントは $WL/4$ である．靱帯に働く力のモーメントは，その着力点が O 点から $r/2$ の位置にあるとすると，$Fr/2$ である．これらが釣り合うことから，$Fr/2 = WL/4$ である．円錐の体積を求め，首の密度が水と同じ 10^3 ($\mathrm{kg/m^3}$) とすると，$W = 10^3 L\pi r^2 g/3$ である（g は重力加速度）．靱帯の断面積は $\pi(r/2)^2$ なので，以上から靱帯の単位断面積あたりにかかる力が次のように求められる．

$$\frac{F}{\pi(r/2)^2} = \frac{4\times 10^3 L^2 g}{6r}. \qquad (4)$$

この式に，大型恐竜の値として $L = 10\,\mathrm{m}$, $r = 0.7\,\mathrm{m}$ を代入してみよう．すると，靱帯の単位断面積には約 1.0×10^6 ($\mathrm{N/m^2}$) の力がかかることになる．この値が無理のない範囲内なのかが問題である．

筆者は，重量挙げの選手が 100 kg のバーベルを両手で持ち上げるとき，ひじ関節の近くに付着している腱にかかる力を見積もったことがある[5]．それによれば，バーベルをもつ腕が水平になった瞬間に，腱の単位断面積あたり，3.0×10^6 ($\mathrm{N/m^2}$)

であった．上に求めた 1.0×10^6 という値は，これより小さいので，一応可能ではあるが，重量挙げとちがって継続しなければならないので，かなりつらいだろう．

ちなみに，恐竜の専門書によれば[6]，角の生えた鹿，およびディプロドクスの首の靱帯には，それぞれ 0.6×10^6, 1.8×10^6 の力がかかるそうである．上記の計算では靱帯の直径を $r/2$ と仮定したが，靱帯は首の脊椎の中の空洞を通っているので，実際はもっと細いはずである．それを考えると，単位断面積あたりの力はディプロドクスの値に近づく．

現在発見されている最大の恐竜にアンフィコエリアスがある[7]．脊椎の骨 1 個だけからの復元だそうで，体長が 60 m 位，首の長さは 20 m を超える．すると，ディプロドクスの 2 倍くらいとなり，首を水平に保って生きることは不可能だったのではないか．

ガリレオがサイズ効果に興味をもったのは，しばしば土木工事において構造物の大きさの限界について相談を受けていたからと想像される．これと類似の問題が，古生物学者の復元図にも生じるはずである．大型恐竜の生態について，発想の転換が求められているのではないだろうか．

『新科学対話』では，その他に，個体に力を加えても形を保つ仕組み，摩擦，流体中で物体が受ける抵抗，振り子の振動周期，自由落下の運動など，様々な問題が議論されている．

4. 太陽系の構造はいかに解明されたか

天動説から地動説に移行したとき，重要な役割を果たしたのは惑星の動きであった．多くの恒星が北極星のまわりに規則正しく回るのに，なぜ 5 個の惑星（水，金，火，木，土）はふらふらと迷うのかが不思議であった．この数は，晴れた日に見える約 5000 個の恒星に比べたらわずかに 0.1%である．こんな少数派は例外としておいて天動説を維持してもよかったはずである．例外を認めないという強固な信念はどこから来たのだろうか．

キリスト教においては，神が作った地球は世界の中心にあるべきだという絶対的な信念があった．これが，修正を加えながらも実に 1000 年以上にわたって天動説を保たせたのである．では，地動説に肩入れしたコペルニクスやケプラーは，どんな信念をもっていたのだろうか．ここでは，惑星の楕円軌道を提唱したケプラーの著作をのぞいてみよう．

ヨハネス・ケプラー：『宇宙の調和』（1619 年刊行），第 5 巻，第 3 章より[8]

（途中略）プトレマイオスの仮説の代わりに私はあえてコペルニクスの宇宙説を採用する．できればこの説が正しいことをすべての人に認めさせたい．だが，彼の見解は一般の好学者にとってまだなお新奇なもので，地球が一惑星にすぎず不動の太陽の周りを巡って星々の間を運行しているという学説は，不条理に聞こえるだろう．

そこで，新奇な見解に抵抗を感じる人は，以下の**調和の思索**がティコ・ブラーエ説にも妥当することを知っていただきたい．あの先生は，天体の配列と運動の調整の仕方に関するすべての見解をコペルニクスと共有しているからである．コペルニクスとブラーエの両大家は一致して惑星軌道の系の中心を太陽が占めるとするが，ブラーエは地球の年周運動だけを太陽に移し換えている．

この文章で，「調和の思索」という言葉に注目していただきたい．「調和」はこの書物の表題にも表れる．ケプラーが太陽系の構造を考える際の指導原理は「調和」であった．なお，上記の最後の文が少々分かりにくい．訳者の注釈によると，ティコ・ブラーエは，太陽を中心として 5 個の惑星が円軌道を描いて回り，その太陽が地球を中心として円軌道を回ると考えていたので，どちらかと言えば天動説であった（この円軌道の半径は，太陽の周りを回る金星と火星の半径の中間の値である）．ただし，ケプラーが指摘しているように，太陽からこの動きをみると，地球を含めたすべての惑星が太陽の周りを回っているように見える．したがっ

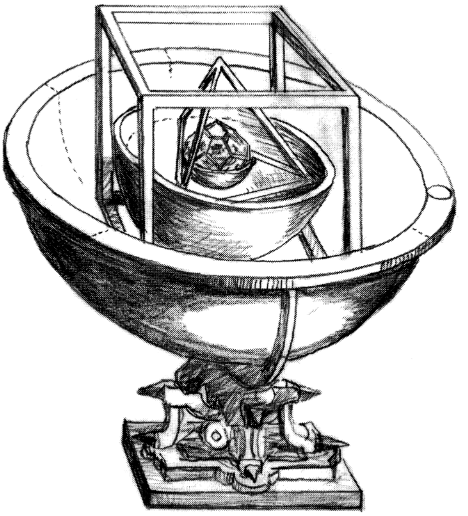


図 3　ケプラーの太陽系モデル（文献 9) から高木スケッチ）.

て，ティコ・ブラーエの考えもコペルニクスと結果的にほとんど同じである．

ケプラーの考えた調和とは，ピタゴラスによって始められ，プラトンによってまとめられた正多面体がもつ完全性や，正確に調律された楽器から生み出される協和音に見られるものである．事実，『宇宙の調和』でも，多面体や音階の記述にかなりのページを割いている．ケプラーは，正多面体を用いて太陽系の構造を予言し，それに基づいて計算した惑星軌道の半径と実測値を比較している．ここで，太陽系の構造に対するケプラーのモデルを紹介しよう（図 3）．これは，彼の最初の著作である 1596 年刊行の『宇宙の神秘』に詳しく説明されている[9]．

彼は，5 個の正多面体と，地球を含めた 6 個の惑星の間に次のような関係をつけようとした．大きな球面に立方体を内接させ，それに球面を内接させ，それに正四面体を内接させ，という手続きを繰り返し，間に球面をはさみながら正十二面体，正二十面体，正八面体という順序で内接させていった．最後に正八面体に球面を内接させると，全部で 6 個の球面ができる．これらの球面が，6 個の惑星の軌道に対応する．

惑星軌道の間（真空である）に正多面体を挿入したのは，神はその支配が行き届かない真空を認めないという信念からであった．ケプラーも，キリスト教の教義の一部を保っていたのである．

ケプラーは，幾何学を用いてこれらの球面の半径を計算し，外側と内側で隣り合う球面の半径の比を求めた．これらの半径比が，隣り合う惑星の観測された軌道半径の比とかなり良く一致したのである．そのときケプラーは神の啓示をうけたように感動し，その勢いを駆って『宇宙の神秘』を執筆した．その刊行は彼が 25 歳のときであった．このアイデアの成否は，正多面体をどんな順序で内接させるかということに依存する．ケプラーはこの順序について理由を述べているが，その主旨は理解しにくい．

しかし，観測値との完全な一致が得られないことから，その後もケプラーはこのモデルの価値を認めながらも，その改良は諦めたようである．師と仰いだティコ・ブラーエの死後，ケプラーは彼の観測データを入手し（実は盗み出して），それをもとに火星の軌道についての新理論を展開し，1609 年に『新天文学』を刊行した[10]．そこで，楕円軌道，面積速度一定という，ケプラーの第 1，第 2 法則を提唱した．ここにおいて，天体運動は円形が基本であるという，古代から維持されてきたパラダイムが崩壊し始めたのである．

5. あとがき

力学の体系は，ガリレイやニュートンの頃から一変した．ケプラーによる惑星の楕円軌道は受け継がれたが，正多面体や調和などの概念はキーワードではなくなった．それから現在に至るまで『プリンキピア』の枠組みが健在であり，それに相対性理論や量子力学が追加されている．

しかしながら，現在の物理学の体系は将来も維持され，大きな転換は起きないとは必ずしも言えない．言い換えれば，それを目指してチャレンジしてもよいのである．科学史を学ぶことの意義には，このような意識を高めることもあるだろう．

蛇足であるが，昔から気になっている古典があるので，それについて一言述べて筆を置くことに

する．筆者が物理学科の学生だったとき，平田森三先生（寺田寅彦の最後の弟子だそうだ）の講義で，紀元前1世紀に書かれたルクレーチウスの著作『物の本質について』[11]のことを聞いた．それは講義内容とは無関係で，筋道が通ってはいないが研究上で有用なヒントを得ることができるということを，先生は学生に伝えたかったのである．筆者は怠慢にしてそれを読もうとしたことはなかったが，この機会に一度目を通すことにした．

確かに読みにくい書物である．当時の知識人キケロによると，「才のひらめきは豊かだが，きわめて技巧的」だそうだ．冒頭近くで目についた文を紹介する．

「万物は何処もかも物質のみが凝集して保たれているのではない．即ち，物の内部には空虚が含まれているのである．（途中略）もしこれがなかったとしたならば，物は動かされることが絶対に不可能になるであろう．」

紀元前5–4世紀のデモクリトスも，原子論の中で空虚の存在に言及しているので，初めての主張ではない．しかしながら，ルクレーチウスの文章は，積み重ねたビー玉をかきまわす過程をほうふつとさせ，生き生きとした感じがある．これが，発想のヒントを与えるのかもしれない．

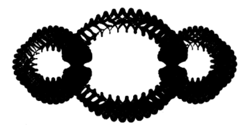
参考文献

1) 河辺六男編：『ニュートン』，世界の名著 31，中央公論社，1975.
2) 原島　鮮：『力学』（三訂版），裳華房，1985.
3) 高木隆司：『力学 I』，裳華房，2001.
4) ガリレオ・ガリレイ，今野武雄・日田節次訳：『新科学対話（上）』，岩波文庫，1937.
5) 高木隆司：『巻き貝はなぜらせん形か』，講談社ブルーバックス，1997.
6) R.M. アレクサンダー，坂本憲一訳：『恐竜の力学』，地人書館，1991.
7) http://homepage3.nifty.com/Daiou3/Zetumetu3.html
8) ヨハネス・ケプラー，岸本良彦訳：『宇宙の調和』，工作舎，2009.
9) ヨハネス・ケプラー，大槻真一郎・岸本良彦訳：『宇宙の神秘』，工作舎，1982.
10) Johannes Kepler: “Astronomia Nova”, 1609.
11) ルクレーチウス，樋口勝彦訳：『物の本質について』，岩波文庫，1961.

（たかき・りゅうじ，神戸芸術工科大学）

解析力学

ハミルトン・ヤコビ理論の起源をたずねて



中根　美知代

1. はじめに

解析力学という学科・科目が確立するにあたっては，ラグランジュ（Joseph-Louis Lagrange; 1736–1813）が『解析力学』[1]と題する著書を1788年に公刊したことが決定的な要因となっている*1)．彼は「本書のなかには一枚の図版も見られないだろう」と緒言で記し，幾何学的な議論を一切行わず，力学の問題を代数的な手法で扱うことを宣言した．幾何学に対置する代数的な手法とは，微分方程式を立てて積分したり，変分法を用いたりすること，すなわち解析学の手法を意味する．解析学を用いて，力学を体系的・演繹的に展開しているから，彼は自著を『解析力学』と名付けたのである．18世紀になると，それまでは幾何学的手法で考察されていた力学に，解析学の手法が積極的に持ち込まれるようになった．このことを徹底させたのが，ラグランジュのいう解析力学であった．

ところが今日，解析力学の起源といわれてまず気にかかるのは，ハミルトンの原理・ラグランジュ方程式・正準方程式・ハミルトン・ヤコビ方程式といった事柄の出処だろう．何をやっているのかほとんどわからないが，量子論を学ぶためには必須といわれて勉強した，あの部分である．これらを含む一連の体系は解析的な式で展開されているから，もちろん解析力学の一部であり，**ハミルトン・ヤコビ理論**とより限定的に呼ばれる．本稿では，この理論の原点を探ることにしよう．

ハミルトン・ヤコビ理論を体系化して扱った最初の教科書は，ヤコビ（Carl Gustuv Jacob Jacobi; 1804–1851）の『**力学講義**』[2]である．1842–43年の冬学期，ケーニヒスベルグ大学での彼の講義録が，1866年，クレプシュ（Alfred Clebsch; 1833–1872）の手で出版された．ヤコビ全集の別冊としても再版されている．ドイツ人が「これは古文だ」といって手を焼く原著であるが，2009年には，英語の現代語訳が出版された．ヤコビ自身の語るハミルトン・ヤコビ理論とはどのようなものなのだろうか．

2. ハミルトンの到達点

「ハミルトン・ヤコビ」という名前が示すように，ヤコビの講義は，ハミルトン（William Rowan Hamilton; 1805–1865）の力学研究に大きく依っている．ハミルトンは，1834年に“動力学の一般的方法”を発表した[3]．この着想は，力学研究に先立つ彼の光学研究から得られたものである．ハミルトンは，n 個の質点からなる拘束のない系を考え，i 番目の質点の質量を m_i，そのデカルト座標での位置を (x_i, y_i, z_i)，・を時間微分としたときの関係式

$$\sum m_i\left(\ddot{x}_i\delta x_i + \ddot{y}_i\delta y_i + \ddot{z}_i\delta z_i\right) = \delta U \quad (1)$$

*1)　初版のタイトルは通常使われている仏語ではない．第2版で自然なものに修正された．参考文献を参照のこと．

を変形して得られた運動方程式から出発して，自身の理論を展開している．ここで U は**力の関数**と呼ばれており，今日のポテンシャル関数にマイナスの符号をつけたものである．ハミルトンは，力学の作用積分

$$V = \int \sum m_i v_i ds_i \qquad (2)$$

（ds は軌道の線要素）

を特性関数と名づけた．そして，それを微分することにより，運動方程式の解をはじめとするその力学系のあらゆる性質がわかること，この関数は，今日**ハミルトン・ヤコビ方程式**と呼ばれているタイプの1階2次の非線形偏微分方程式を満たすことを示した．

1835年の“第2論文”で，ハミルトンは一般座標を $(q_1, \ldots, q_n)$，運動エネルギーを $T = T(\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n)$ として，**ラグランジュの運動方程式**

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{\partial U}{\partial q_i} \qquad (3)$$

を提示し，ここからいわゆる運動方程式の**正準形**

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad (4)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

を導いている[4]．ここで，$p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}, H = T + U$ である．

p_i をこのようにかく着想は，すでにポアソン（Siméon Denis Poisson; 1781–1840）にあった．彼はまた，摂動関数 Ω の方程式を正準形でかいている[5]．『解析力学第2版』では，それは $q_i(0) = a_i$, $p_i(0) = a'_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ として，

$$\frac{da_i}{dt} = -\frac{\partial \Omega}{\partial a'_i}, \quad \frac{da'_i}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial a_i} \qquad (5)$$

の形で提示されている．ハミルトンは彼らの仕事から着想を得て，ラグランジュ方程式を (4) 式の形に書き換え，同時に**正準座標**を導入したのであろう．

方程式 (4) に対しても，彼が主関数と呼んだ

$$S = V - tH = \int_0^t (T + U) dt, \qquad (6)$$

すなわち運動エネルギーと力の関数の和を時間で積分したものが特性関数と同じ役割を持っていることが示されている．彼は，主関数 S もまた，特性関数と同じタイプの偏微分方程式を満たすことを示した．

ただし，ハミルトンは，偏微分方程式を解いて特性関数・主関数を求めていない．それらを微分すれば，運動方程式の解が得られることは指摘していたが，偏微分方程式を解いて運動方程式の解を求める方向へは考察が進まないのである．

またハミルトンは，$\delta S = 0$ と置くことにより，ラグランジュの運動方程式が得られることを指摘している．これが「**ハミルトンの原理**」の原型だが，ハミルトンはこの原理から出発して運動方程式を導き，その上で力学の理論を展開しているわけではない．これはあくまで，主関数 S の一つの性質として取り上げられており，彼の研究の副産物にすぎない．

なお，ハミルトンは，あらゆる自然現象は，当時活力保存則と呼ばれていた力学的エネルギー保存則を満たすと理解していた．

3. ハミルトンからヤコビへ：『力学講義』の全体像

ヤコビは，1837年前後には，ハミルトンの仕事に言及した複数の論文を発表している．彼は，ハミルトンの数学上の不備を整備するとともに，そこでの成果が，力の関数が時間 t を陽に含む場合にまで拡張できることを示した．また，ハミルトン・ヤコビ方程式の完全解が運動方程式の解を与えることも明示している[6]．ヤコビは，1836年の制限3体問題を扱った論文で，力の関数が時間 t に陽に依存するとみなした考察を行っていたし[7]，初期の仕事は偏微分方程式であったから，それらの成果を踏まえたものであろう．摂動関数の方程式 (3) とハミルトンが導いた運動方程式に統一的な見方を与え，この形の方程式を「正準」と名付けたのもヤコビである[8]．彼はまた，ハミルトンの力学研究から，**変分問題**と偏微分方程式の関係

が示唆されたとも記している[9]．これらの考察を体系的にまとめたのが，全 36 課と補遺からなる『力学講義』であった．

ヤコビの仕事は，ハミルトンの力学研究を整備する過程で数学の理論の着想を得，それを展開したという性格がある．『力学講義』もまた，力学というよりも数学の書としての色彩が強い．質点系の力学の法則を数学解析の手法によって記述したあと，そこで登場する微分方程式の数学的性質を考察することがこの講義の主題だった．ヤコビは，力学に関わる偏微分方程式を重点的に扱い，「ここで論じた偏微分方程式論はあらゆる点において，力学の理論の進歩をもたらす」と記す．彼自身が導いた最終乗式の説明にもかなりの紙幅がさかれている．このような性質をもつ講義の中で，ハミルトン・ヤコビ理論に関わる一連の手続きはどのように提示されているだろうか．

4.『力学講義』での「ハミルトン・ヤコビ理論」

ヤコビの力学は，点 (x_i, y_i, z_i) に作用する力の成分を (X_i, Y_i, Z_i) として，運動方程式

$$m_i\ddot{x}_i = X_i,\ m_i\ddot{y}_i = Y_i,\ m_i\ddot{z}_i = Z_i \qquad (7)$$

から出発する．その上で，(1) 式に相当する方程式を導き，4 つの力学の原理を証明する．それは，重力中心の運動保存の原理，活力保存の原理，当時は面積保存と呼ばれていた角運動量保存の原理，そして最小作用の原理である．これは，質点の運動は，(2) 式を最小にするような軌道をとることを意味している．以上が第 2 課から第 6 課の内容である．

第 7 課でラグランジュの未定乗数法に言及した後，ヤコビは，第 8 課で，デカルト座標でかかれた T, U に対し，関係式

$$\delta S = \delta\int_0^t (T+U)dt = 0 \qquad (8)$$

が新しい原理となることを指摘した．彼は，力の関数が時間 t を陽に含んでいる場合，つまり非保存系の一部に対してもこの原理が成り立つとしている．ヤコビは (8) 式から運動方程式 (7) を導いた後，この原理は任意の座標について成り立つとし，(8) 式からラグランジュ方程式 (3) を導いた．

ヤコビは，ハミルトンが最初にこの原理から出発したと記している．この「伝説」ゆえにハミルトンの原理と呼ばれるのであろうが，ハミルトンがこれを原理としていなかったのは前節で見たとおりである．なお，第 9 課では，ラグランジュ方程式から正準形の運動方程式が導かれているが，この手続きは，おおむねハミルトンの 1835 年の論文と同様である．

最終乗式とその力学への応用が述べられたのち，第 19 課で「ハミルトンの偏微分方程式とその変分問題への応用」と題する講義がなされる．ヤコビは，一般座標をつかって (8) 式の被積分関数を

$$\begin{aligned} &T(\dot{q}_1(t), \ldots, \dot{q}_n(t)) + U(t, q_1(t), \ldots, q_n(t)) \\ &= \varphi(t, q_1(t), \ldots, q_n(t), \dot{q}_1(t), \ldots, \dot{q}_n(t)) \end{aligned}$$

とかくことにより，(8) 式が純粋数学での変分問題を与えていると読みとれることを指摘する．時間 t を陽に含む力の関数は，普通の力学ではあまり出会わない．しかし，変分問題へと一般化する上で，力の関数の拡張は本質的だった．$\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial\dot{q}_i} = p_i$ とおいた p_i が，$\frac{\partial S}{\partial q_i}$ と等しくなることを示した後，ヤコビは，関係式

$$\begin{aligned} \varphi = \frac{dS}{dt} &= \frac{\partial S}{\partial t} + \sum\frac{\partial S}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt} \\ &= \frac{\partial S}{\partial t} + \sum p_i\dot{q}_i \end{aligned}$$

を導く．$\psi = \sum p_i\dot{q}_i - \varphi$ とおくことにより，ヤコビは，S が偏微分方程式

$$\begin{aligned} &\frac{\partial S}{\partial t} + \psi\left(t, q_1(t), \ldots, q_n(t), \frac{\partial S}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_n}\right) \\ &= 0 \qquad (9) \end{aligned}$$

を満たすことを示した．これが，ヤコビのいう「ハミルトンの偏微分方程式」，すなわちヤコビ自身が導いたハミルトン・ヤコビ方程式である．

以上の考察を力学に引き戻すと，

$$\sum p_i\dot{q}_i = \sum\dot{q}_i\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_i} = 2T \qquad (10)$$

であるから，$\psi = 2T - (U+T) = T+U$ となり，偏微分方程式 (9) は

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H = 0 \tag{11}$$

となる．第 8・9 課にしたがえば，この H と p_i によって，運動方程式を正準形でかくことができ，H と関数 S の間には，(11) 式で定められるような関係があることがわかる．すなわちハミルトンの原理 $\delta S = 0$，正準方程式，ハミルトン・ヤコビ方程式がここで関係づけられたのである．ヤコビは，ハミルトンの論文の中から，この関係を引き出したのだった．

ヤコビは，この考察を変分問題に対して定式化する．すなわち，第 8・9 課で提示したものとほぼ同じ手続きにより，変分問題

$$\delta S = \int_{\tau}^{t} \varphi dt = 0$$

は，ラグランジュ方程式に相当する関係式を経て正準形の方程式

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \tag{12}$$

を解くことに帰着できること，ここにでてくる S は偏微分方程式 (9) の解であることを示したのだった．ただし，この過程で登場する方程式は，運動を記述する方程式ではなく，あくまでも極値曲線の方程式，運動の軌道を表す方程式である．

引き続く第 20 課で，ヤコビは偏微分方程式 (9) の完全解 $S = S(t, q_1, \ldots, q_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ ($(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ は任意定数) を求めることができれば，新しい任意定数 $\beta_1, \ldots, \beta_n$ を導入し，

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \cdots, \frac{\partial S}{\partial \alpha_n} = \beta_n$$

とおくと，これらが，

$$\frac{\partial S}{\partial q_1} = p_1, \cdots, \frac{\partial S}{\partial q_n} = p_n$$

とともに正準方程式 (12) の解を与えること，つまり，偏微分方程式を解くことにより常微分方程式系の解が得られることを示した．今日では「ヤコビの方法」と呼ばれるほうが多いこの方法を，ヤコビは「ハミルトンの方法」と称した．

ヤコビが提示した変分法での記述を，力の関数 U の符号に注意した上で，$\varphi = L$（L は**ラグランジュ関数**），$\psi = H$（H は**ハミルトン関数**）と置き換えてみると，今日の力学の教科書とよく似た手続きがここでとられていることに気がつくだろう．ハミルトン・ヤコビ理論の源泉は，力学ではなく，ハミルトンの力学から着想を得た変分法の中にあったのである．力学はその特別な場合というのがヤコビの理解だった．ただし力学の講義と題しているので，ヤコビはその特別な場合，すなわちデカルト座標で書かれた運動方程式や，ψ が時間 t を陽に含まない場合もていねいに論じている．一方ヤコビのこの仕事から，「変分法のハミルトン・ヤコビ理論」と称する，数学の一つの分野が派生することとなった[10)]．

5. ヤコビの方法の効用と限界

さて，ヤコビは，実際にこの方法を使ってみせる．常微分方程式を偏微分方程式に帰着させるといっても，偏微分方程式を解くほうが常微分方程式を解くよりも一般には難しい．しかしヤコビは，適当な変数変換が見出せて，ハミルトン・ヤコビ方程式が変数分離形にできれば，それは求積法で容易に解けることを指摘した．

ヤコビがまず例示したのは，座標原点に固定されているとみなした太陽を中心として運動する質点の運動である．この運動に伴うハミルトン・ヤコビ方程式は，(x, y, z) を質点の位置，$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$，k を引力定数，α を全エネルギーとすると

$$\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2\right\} = \frac{k^2}{r} - \alpha \tag{13}$$

となる．これを極座標

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi\cos\psi,\ z = r\sin\varphi\sin\psi$$

で書き換えると，

$$\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\varphi}\left(\frac{\partial W}{\partial \psi}\right)^2\right\} = \frac{k^2}{r}-\alpha \qquad (14)$$

となり，含まれている変数 $r,\ \varphi,\ \psi$ について，変数分離形になっている．そこで一つの変数についての積分を繰り返すことにより，$(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ を任意変数として，方程式 (14) の完全解

$$W=\int\sqrt{\frac{2k^2}{r}-2\alpha-\frac{2\beta}{r^2}}dr + \int\sqrt{2\beta-\frac{2\gamma}{\sin^2\psi}}d\varphi+\sqrt{2\gamma}\psi \quad (15)$$

が求められる．この完全解を任意変数で微分することにより，運動方程式の解が導かれる．

別の座標によっても，偏微分方程式 (13) が変数分離形になることを示した後，ヤコビは重要な指摘をする．「与えられた方程式を積分するうえで本質的に難しいのは，適切な座標を選ぶことである．それを見出すための一般的な規則はない．そこで，逆のやり方をしなくてはならない．つまり，特定の座標変換を指定しておいて，その変換を使えるような問題を探すのである」と．

ヤコビは $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial W}{\partial x_i}\right)^2$ の形をした 2 次式を変数分離形にする上で有用として，**楕円座標**を導入する．ここでは，デカルト座標での点 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ は，方程式

$$\frac{x_1^2}{a_1+\lambda}+\frac{x_2^2}{a_2+\lambda}+\ldots+\frac{x_n^2}{a_n+\lambda}=1, \quad (a_1<a_2<\ldots<a_n) \quad (16)$$

の n 個の根 $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ からなる座標でかかれることになる．$n=2$ の場合，方程式 (16) は 2 次方程式となるので，その 2 つの根を $\lambda_1,\ \lambda_2$ $(\lambda_1>\lambda_2)$ としよう．λ_1 をこの 2 次方程式に代入することにより定められる $(x_1,\ x_2)$ は共通の焦点をもつ楕円族を表す．λ_2 の場合は，楕円と同じ焦点をもつ双曲線族になる．$\lambda_1=\text{const.}$, $\lambda_2=\text{const.}$ とおくことにより，その中の一つの楕円，双曲線を指定できる．そこで，デカルト座標での点 (x, y) を，楕円と双曲線の交わりの点 $(\lambda_1,\ \lambda_2)$ と捉えるのが楕円座標である（図 1）．ヤコビは，このようにして楕円座標の幾何学的な意味も説明した．

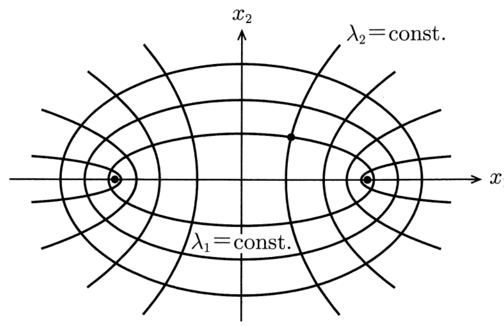


図 1　楕円座標.

この座標によってハミルトン・ヤコビ方程式を変数分離形にできる問題として，ヤコビが探し出してきたのは，3 軸楕円体上の測地線，曲面を平面上に射影する問題，2 つの固定中心力による引力の問題，アーベルの定理と称する，常微分方程式系の性質に関する問題である．先の太陽の周りを運動する質点の運動の決定とは異なり，これらの問題は，常微分方程式を直接積分することによって解くのが極めて難しい．これらを解決することにより，ヤコビはこの方法の威力を示した．しかし，彼はまた，それらに伴うハミルトン・ヤコビ方程式が楕円座標によって変数分離系になったからたまたま解けただけであって，この方法で解決できる問題が極めて限られていることも自覚していた．

この話題が一段落すると，ヤコビは，今日ポアソン括弧式と呼ばれるものを導入して，ハミルトン・ヤコビ方程式の解の性質を考察し，『力学講義』を終えている*2)．

6. おわりに：ハミルトン・ヤコビ理論のその後

ヤコビが提示した方法は，極めて限定的にしか

*2)　ヤコビは，1847–48 年にベルリンで『解析力学講義』を行っており，講義録が 1996 年に公刊された[11)]．

使えない．それなのに，なぜ今日の力学の教科書に必ず取り上げられているのだろうか．ハミルトン・ヤコビ方程式は，**正準変換**と結びついて導入されることが多いが，ここには，正準変換はないのか*3)．読者はこのような疑問を持つと思う．実は，ヤコビの時点では，今日学ぶ概念が出そろっていないのである．

ヤコビ以降の過程を追っていこうとして，1850年代以降に出版された『力学』ないしは『解析力学』という本を紐解くと，多くのものが，ハミルトン・ヤコビ理論に触れていないことに気づく．ハミルトンの原理やラグランジュ方程式は取り上げられることはあっても，そこから正準方程式やハミルトン・ヤコビ方程式へと続く記述はまずない．19世紀後半，この理論を知っていた物理学者は少数派だった．一方，天体力学では，ハミルトン・ヤコビ理論は必須の方法として学ばれ，発展していった．その過程では『力学講義』にはない概念も導入されており，19世紀末には，正準変換の概念も取りあげられていた[12)]．

20世紀に入り，**量子論**に関わる問題を扱うようになったとき，たまたまハミルトン・ヤコビ理論を知っていた物理学者は，この方法が有用だと気づいた．当時，この理論を学ぶために広く読まれた教科書は，シャリエ（Carl Vilhelm Ludwig Charlier; 1862–1934）が著した『天の力学』であった[13)]．1919年，ゾンマーフェルト（Arnold Sommerfeld; 1868–1951）は，ハミルトン・ヤコビ理論を物理学者に教えなくてはならないと宣言し，その概要を『原子構造とスペクトル線』の付録で紹介する[14)]．このことを契機として，ハミルトン・ヤコビ理論が物理学で必須の項目となり，『力学』や『解析力学』と称する多くの教科書で取り上げられるようになったのである．今日，多くの人が「解析力学」といえばハミルトン・ヤコビ理論を思い浮かべるに至るには，このような経緯があった．

*3) 『力学講義』では取り上げられていないが，正準変換という着想自体は，ヤコビが気づいていた．1837年には，正準形を保つような変数変換を与える関数の条件を指摘しており，その証明は，1890年に公刊された遺稿のなかでなされていた．しかし，ヤコビはハミルトン・ヤコビ方程式の完全解がそのような関数になることは言及しなかった．

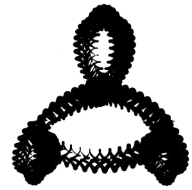
参考文献

1) J.L. Lagrange, *Méchanique analitique*, 1788, Paris. Second edition, *Mécanique analytique* vol.1 (1811), vol.2 (1815), *Œuvres* **11, 12**.
2) C.G.J. Jacobi, *Vorlesungen über Dynamik*, 1866, Berlin, A. Clebsch ed. = in *C.G.J. Jacobi's Gesammelte Werke Supplementband.* 英訳 Jacobi's Lectures on Dynamics, Hindustan Book Agency, 2009.
3) W.R. Hamilton, "On a General Method in Dynamics", *Philosophical Transactions* Part 2, pp.247–308, 1834 = *Mathematical Papers* **2**, pp.103–161.
4) W.R. Hamilton, "Second Essay on a General Method in Dynamics", *Philosophical Transactions* Part 1, pp.95–144, 1835 = *Mathematical Papers* **2**, pp.162–211.
5) S.D. Poisson, "Mémoire sur la variation des constantes arbitraires dans les questions de la mécanique", *Journal de l'École Polytechnique*, **8**, 1809, pp.266–344.
6) C.G.J. Jacobi, "Über die Reduction der Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen irgend einer Zahl Variabeln auf die Integration eines einzigen Systems gewohnlicher Differentialgleichungen", *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik* **17**, 1837, pp.97–162 = *Werke* **4**, pp.57–127.
7) C.G.J. Jacobi, "Sur le mouvement d'un point et sur un cas particulier du problèm des trois corps", *Comptes Rendus*, **t.3**, pp.59–61, 1836 = *Werke* **4**, pp.37–38.
8) C.G.J. Jacobi, "Note sur l'intégration des équations différentielles de la dynamique", *Comptes Rendus*, vol.5, 1837, pp.61–67. = in *Werke*, **4**, pp.131–136.
9) C.G.J. Jacobi, "Zur Theorie der Variationsrechnung und der Differentialgleichungen", *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik* **17**, 1837, pp.68–82 = *Werke* **4**, pp.39–55.
10) H.H. Goldstine, *A History of the Calculus of Variations from the 17th through the 19th Century*, 1980, Springer-Verlag, New York.
11) C.G.J. Jacobi, *Vorlesungen über analytische Mechanik: Berlin 1847/48*, H. Pulte ed., 1996, Braunschweig/Wiesbaden.
12) H. Poincaré, *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*, vol.1 (1892), vol.2 (1893), vol.3 (1899), Paris.
13) C.V.L Charlier, *Die Mechanik des Himmels* Bd.1 (1902), Bd.2 (1907), Leipzig.
14) A. Sommerfeld, *Atombau und Spektrallinien* (1919), Braunschweig.

（なかね・みちよ，立教大学理学部）

J.C. Maxwell

電磁場の動力学



江沢 洋

1. Faraday–Maxwell–Hertz–Lorentz

Maxwell の 1865 年の論文「電磁場の動力学」[1] をとりあげる．電磁場の基礎方程式を提出し，光の電磁波説を打ち立てた論文である．

その背景には M. Faraday の実験・研究があり[2]，Maxwell の先行論文「物理的力線」（1861）[3] も重要である．「物理的」というのは，真空を電気分極し得る媒質とその間を埋めてボールベアリングの役をする荷電粒子というモデルを立てたことによる（図 1）．「場」（field）という言葉が初めて用いられたのも，Maxwell のこの論文である．

Maxwell[1] の提出した方程式はベクトル方程式 6 本とスカラー方程式 2 本からなる複雑なものであった．それを今日の形まで洗練したのは H. Hertz[4]，J.H. Poynting, H.A. Lorentz[5,6] などの労作である．特に Hertz は Maxwell の予言した電磁波を実際におこして見せ，その実在を証明し，その性状を調べて光と同じであることを明らかにした．Lorentz はエーテルの中を動く荷電粒子の集団が物質の姿であるという考えを推し進めた．これと並行して W. Thomson (Kelvin 卿) らによりエーテルの力学的モデルが執拗に追い求められた．

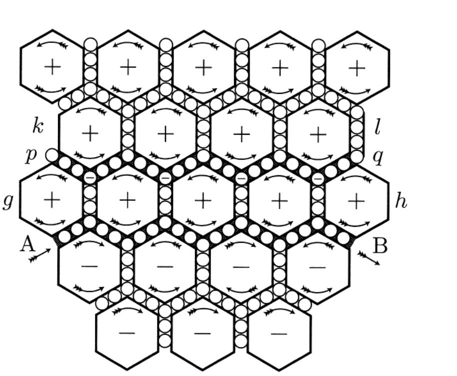


図 1　Maxwell のエーテルのモデル．磁場は六角形の柱の回転（渦）である．磁場がおこると柱が回転し，間に挟まった小球（電荷）が回転させられ移動をはじめる．これが電磁誘導による電流である．

この解説では，Maxwell の「電磁場の動力学」[1] を主とし，Hertz の研究に軽く触れる．他の仕事に割く紙数はない．広重 徹の論文[7] を参照．

2. 電磁場の動力学

2.1 電流の力学的な扱い

Maxwell は論文「電磁場の動力学」（1865）を「電流の力学的な扱い」から始めている．

図 2 に示すような 2 つの回路を考え，それぞれに電流 i_1, i_2 が流れているとする．この系のエネルギーは

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 + M i_1 i_2 \qquad (2.1)$$

と書ける．L_k は自己誘導係数，M は相互誘導係数である（$k=1, 2$）．L_k, M, i_k などは，すべて時間 t に依存してよいが，$i_1(t)$ のように時間変数を書くことは省略する．L_k は回路の形に，M はその上に 2 つの回路の相対的な位置にも依存する．

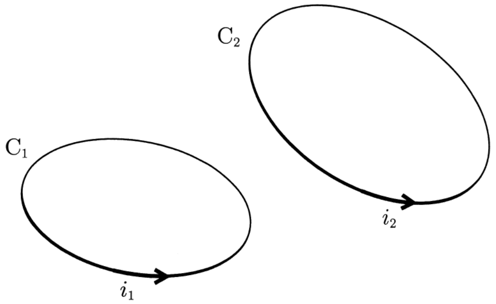


図 2 2 つのコイル．電流の正の向きを，その向きに右ネジを回すとコイルを下から上に突き抜けるように定める．これで同時に面の法線の向きも定まる．第 3 節以下ではコイル C_2 を単に C とよぶ．

Maxwell は電流を速度になぞらえて $\dot{y}_k$ と書き

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}L_1\dot{y}_1^2+\frac{1}{2}L_2\dot{y}_2^2+M\dot{y}_1\dot{y}_2$$

を力学のラグランジアンに見立てて，運動量

$$p_k=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{y}_k} \tag{2.2}$$

を定義する．すなわち

$$p_1=L_1\dot{y}_1+M\dot{y}_2,\quad p_2=L_2\dot{y}_2+M\dot{y}_1$$

と，言っても，これは力学でいう運動量ではないから電磁的運動量とよぶ．Maxwell は力学とのアナロジーを頼りに電磁場の基礎方程式を導こうというのである．

電流 $\dot{y}_1$ を変化させたとき p_2 にはたらく力は，運動量の時間微分で

$$X_2=\frac{dp_2}{dt}=\frac{d}{dt}(M\dot{y}_1) \tag{2.3}$$

となる．これも力学でいう力ではないが，電磁誘導による起電“力”をあたえるというのである．回路 1 を回路 2 に近づけたり遠ざけたりしても，あるいは回路 1 を変形しても M が変化し，やはり p_2 にはたらく起電力が生ずる．

これを今風に言い直して種明かしをすれば，こうなる．相互誘導係数は

$$M=\frac{\mu}{4\pi}\int_{C_1}\int_{C_2}\frac{d\boldsymbol{r}_1\cdot d\boldsymbol{r}_2}{|\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1|} \tag{2.4}$$

で与えられる．$\boldsymbol{r}_k$ は回路 C_k 上の位置を表し $d\boldsymbol{r}_k$ は線素片，積分はそれぞれの回路を一周するように行なう（図 2）．これに電流 i_1 をかければ

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_2)=\frac{\mu}{4\pi}\int_{C_1}\frac{i_1 d\boldsymbol{r}_1}{|\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1|}$$

は回路 C_1 を流れる電流 i_1 が回路 C_2 上につくるベクトル・ポテンシャルに他ならない．これを用いれば (2.3) は

$$X_2=\frac{d}{dt}\int_{C_2}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_2)\cdot d\boldsymbol{r}_2$$

となる．この線積分を Stokes の定理を用いて C_2 を縁とする面 S_2 上の面積分に直すと

$$X_2=\frac{d}{dt}\int_{S_2}\left\{\mathrm{rot}_2\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_2)\right\}\cdot d\boldsymbol{S}_2$$

となる．rot_2 は変数 $\boldsymbol{r}_2$ に関する rot であり，$d\boldsymbol{S}_2$ は面 S_2 の面素片の ① 面積を大きさとし ② 法線方向を向いたベクトルである．

$\mathrm{rot}_2\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_2)$ は位置 $\boldsymbol{r}_2$ における磁束密度 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}_2)$ に等しいから

$$X_2=\frac{d}{dt}\int_{S_2}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}_2)\cdot d\boldsymbol{S}_2=\frac{d}{dt}(\text{面 } S_2 \text{を貫く磁束})$$

となり，電磁誘導の法則により，これは回路 C_2 に誘導される起電力 V_2 に，いやそうではなくて $-V_2$ に等しい．おやおや，マイナスがついてしまった！ (2.3) の下に述べたことは訂正しなければならない．

Maxwell は，力学とのアナロジーをたどるこの計算がうまくいったことに味をしめて，電磁場の場合にもためらいなく計算を進める．

3. 電磁場の基礎方程式

3.1 電場の表式

ここでも図 2 に示すような 2 つの回路を考えるが，回路 C_2 の量の添字 2 は省くことにしよう．また，時間変数も書くのは省略する．Maxwell は電場を (P,Q,R) とするというようにベクトルを成分で書き $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}$ なども成分で書いているが，ここでは今風の記法に直す．

Maxwell は，前節でしたことを頭において，$\boldsymbol{A}$

を電磁的運動量とよび，これから“力”を

$$\boldsymbol{E}=-\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A} \tag{3.1}$$

によって定義する．しかし，この定義は前節のものとちがってベクトルである．前節のものに近いのは線積分

$$\int_{\mathrm{C}}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}=-\frac{d}{dt}\int_{\mathrm{C}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} \tag{3.2}$$

であって，これを回路 C に生ずる誘導起電力と見るとすれば $\boldsymbol{E}$ は電場ということになる．電場には，またポテンシャル Ψ から $\boldsymbol{E}=-\mathrm{grad}\,\Psi$ として導かれる部分もある．(3.1) は回路 C_1 の位置や形，そこを流れる電流などに依存する部分である．両者を合わせれば，電場は

$$\boldsymbol{E}=-\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}-\mathrm{grad}\,\Psi \tag{D}$$

と書き表わされる．これを (3.2) の左辺に代入すると，$-\mathrm{grad}\,\Psi$ は回路を一周する積分では消えてしまうから，(3.2) はそのまま成り立つ．

Maxwell は手探りで電磁場の基礎方程式を探している．

3.2 電気変位と電流

電気変位 $\boldsymbol{D}$ とは，エーテルの分極 $\varepsilon_0\boldsymbol{E}$ と物体の分極 $\boldsymbol{P}$ の和であって電荷の変位を表わし（ε_0 はエーテルの誘電率．Maxwell 流には弾性率)，その時間変化 $\partial\boldsymbol{D}/\partial t$ を電流（σ は電気伝導率）

$$\boldsymbol{j}=\sigma\boldsymbol{E} \tag{F}$$

に加えたものが全電流

$$\boldsymbol{j}'=\boldsymbol{j}+\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{A}$$

になる．真電荷密度を ρ とすれば

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{D}=\rho \tag{G}$$

および電荷の保存

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}\,\boldsymbol{j}=0 \tag{H}$$

が成り立つ．これから $\mathrm{div}\,\boldsymbol{j}'=0$ がでる．

分極するエーテル（真空）という描像から変位電流 $\partial\boldsymbol{D}/\partial t$ が自然と導入されてしまった！ (A) で $\partial\boldsymbol{P}/\partial t$ は物質の分極による電流，$\varepsilon_0\partial\boldsymbol{E}/\partial t$ はエーテルの分極による電流である．

ここで，Maxwell は電場の弾性を表わす式だと言い ε をエーテルと物質を合わせた弾性率として

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})=\varepsilon\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \tag{E}$$

を書く．変位が力に比例するという式である．

3.3 磁場

磁場 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ は，細くて長い棒磁石の N 極を点 $\boldsymbol{r}$ に差し込んだとき，それにはたらく力として定義する．磁気誘導は $\mu\boldsymbol{H}$ と書かれる．コイル C の張る面 S にわたる $\mu\boldsymbol{H}$ の法線成分の面積分は S を貫く磁束線の数になるから，その時間微分は，Faraday の電磁誘導の法則により，回路 C におこる誘導起電力の符号を変えたものになる．

他方，(3.1) のところで言ったように $\boldsymbol{A}$ は電磁的運動量で

$$\int_{\mathrm{C}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}=\int_{\mathrm{S}}\{\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\}\cdot d\boldsymbol{S}$$

の時間微分は力を与える．正確には回路 C におこる誘導起電力の符号を変えたものになる．

したがって

$$\int_{\mathrm{S}}\mu\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S}=\int_{\mathrm{S}}\{\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\}\cdot d\boldsymbol{S}$$

が得られる．これは任意の S に対して成り立つから

$$\mu\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})=\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \tag{B}$$

が得られた．一般に div rot $=0$ であるから

$$\mathrm{div}\,(\mu\boldsymbol{H})=0 \tag{3.3}$$

が成り立つ．

続いて Maxwell は，実験によれば磁場の中で細長い棒磁石の N 極を閉曲線 C に沿って一回りさせる仕事は，C の張る面を電流が貫かなければ 0（図 3 (a))，電流 j' が貫けば j' である（図 3 (b))という．この性質は

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{j}'(\boldsymbol{r}) \tag{C}$$

を意味する．

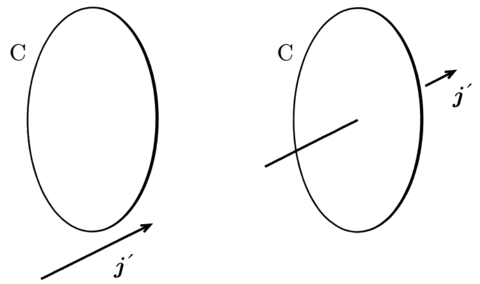


図 3　細長い棒磁石の N 極を閉曲線 C に沿って運ぶ仕事．C の張る面を電流が (a) 貫かない場合，(b) 貫く場合．

3.4 総括

これで Maxwell の電磁場の基礎方程式はすっかりそろった．場を記述する変数

$$\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{E},\ \boldsymbol{D},\ \boldsymbol{H},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{j}',\ \rho,\ \Psi$$

の——ベクトルの成分を一つ一つ数えて——全部で 20 個の変数に対して (A) $\cdots$ (H) の 20 個の方程式があるから必要十分である，と Maxwell は言う．

しかし，これらの方程式は互いに独立ではない．たとえば，一般に div rot = 0 であるから，(C) より

$$\operatorname{div}\boldsymbol{j}' = 0$$

となるので (A) は

$$\operatorname{div}\left(\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{D}\right) = 0$$

を与える．ところが，これは (G) に注意すれば (H) に他ならないことが分かる．

Maxwell の著書 *A Treatise on Electricity and Magnetism* (3rd ed., Clarendon Press, 1891) では場を記述する変数も方程式もさらに増えている．しかし，ベクトルは成分を 3 つ並べて書く方式と一つの実体としてドイツ文字で表す方式が併記される．Maxwell 方程式は H. Hertz[4)], J.H. Poynting, H.A. Lorentz らによって洗練された．Lorentz の全集をざっと見たところでは，1892 年の「Maxwell の電磁理論と動く物体への応用」[5)] にかなり現在のものに近い式が，しかしベクトルの成分ごとに書かれている．1906 年の「運動する物体の中の電気的・光学的現象の研究」[6)] にくると div や rot の記号も登場し電場，磁場，電流密度などのベクトルはドイツ文字で書かれ現代的になる．

4. 光の電磁理論

4.1 波動方程式

いま，空間に電荷も電流もないとしよう：$\rho = 0,\ \boldsymbol{j} = 0$. 法則 (A) と (D) に (E) を考慮して

$$\frac{1}{\varepsilon}\boldsymbol{j}' = \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = -\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} + \operatorname{grad}\frac{\partial \Psi}{\partial t}.$$

他方，(B) と (C) から

$$\mu\boldsymbol{j}' = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{A} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{A} - \Delta\boldsymbol{A}$$

が得られる．よって

$$\frac{1}{\varepsilon}\big(\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{A} - \Delta\boldsymbol{A}\big) = \mu\left(-\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} + \operatorname{grad}\frac{\partial \Psi}{\partial t}\right) \tag{4.1}$$

となるが，両辺に rot をかけると，一般に rot grad = 0 だから左辺からは grad div $\boldsymbol{A}$ が，右辺からは grad $\partial\Psi/\partial t$ が落ちて

$$\Delta\operatorname{rot}\boldsymbol{A} = \varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\operatorname{rot}\boldsymbol{A}$$

が得られる．(B) を考慮すれば

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{B} = 0 \qquad \left(c^2 = \frac{1}{\varepsilon\mu}\right). \tag{4.2}$$

これは，磁束密度 $\boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H}$ に対する波動方程式である．磁束密度が，その方向は変えずに速さ c で波動として伝播することをいっている．そして (3.3) により

$$\operatorname{div}\boldsymbol{B} = 0 \tag{4.3}$$

が成り立つ．たとえば，

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{B}_0 \sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t) \tag{4.4}$$

を考えてみると，(4.2) は

$$c^2 = \frac{\omega^2}{k^2}$$

ならば満足される．これは，まず波動が磁束密度の方向を $\boldsymbol{B}_0$ に保ったまま伝播することを意味する．これを $\boldsymbol{B}$ の波動は $\boldsymbol{B}_0$ 方向に偏っている（polarized）という．それ以上には，波長 $\lambda = 2\pi/k$ と振動数 $\nu = \omega/(2\pi)$ の間に周知の関係 $\lambda\nu = c$ が成り立つことをいうにすぎない．(4.3) は

$$\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{B}_0 = 0 \tag{4.5}$$

で，波動の偏りの方向が進行方向 $\boldsymbol{k}$ に垂直であることを意味する．この波動は横波なのである．これは光の波について E.T. Malus 以来知られていることに一致する．

この波の速さ $c = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$ については，いま用いている単位系が Maxwell と違うので彼の計算を引用することはできないが，彼は空気中の伝播に対して，k, μ の Weber と Kohlrausch の測定から

$$c = 310,740,000\,\mathrm{m/s} \quad (k,\,\mu \text{の実測値から計算})$$

を得た．これに対して実測値は

$$c = \begin{cases} 314,858,000\,\mathrm{m/s} & (\text{Fizeau の実験}), \\ 298,000,000\,\mathrm{m/s} & (\text{Foucault の実験}), \\ 308,000,000\,\mathrm{m/s} & (\text{光行差の測定から}) \end{cases}$$

で計算値とよく一致している．

これらのことから，Maxwell は光と電磁気は同じ物質の affection (= attribute) だといい[12]，光は電磁的な法則に従って媒質中を伝播する電磁気的な擾乱である，と結論している．

続いて Maxwell は (4.1) から rot をかけて落としてしまった Ψ と div$\boldsymbol{A}$ が悪さをしないことを確かめている．その上で，改めて電磁的な科学と光学的な科学の光に関する結論が一致することを述べているが，なお

> On the other hand, both sciences are at a loss when called on to affirm or deny the existence of normal vibrations.

と付け加えている．この意味は？

Maxwell は，この後，光の屈折率の理論を述べ，結晶のような非等方的な媒質の中の光の伝播を論じている．

4.2 Faraday への手紙

Maxwell が 1861 年 10 月 19 日に Faraday に書いた手紙がある[8]．彼は，光の電磁理論ができたこと，その結論が光の実験に合うことを報告し，

> 私の理論が事実であってもそうでなくても，いまや光の媒質と電磁気の媒質が同じものだと信ずる強い理由が得られたと思います

として，その理由を述べた後に，こう書いている．

> 私は，電気について数学的な研究を始めてから遠隔作用力[9]についての古くからのあらゆる慣習を避け，正しい考え方への第一歩としてあなたの論文を読んで以来，他の論文もこの考えで解釈し，遠隔作用で説明することは決してしませんでした．偏見なしに読めるまで読むのを止めたおかげで，私は，電気的緊張状態や連接粒子の作用など，あなたのお考えをしっかりと掴むことができたのだと思います．私がお手紙しますのは，あなたを物事の理解に導いたのと同じ考え方を私が掴み得ているか，私の考えをあなたのお名前でよぶことが許されるか，確かめたいからなのです．

5. Hertz の理論

Maxwell は 1879 年に没したが，その後 1887–1888 年になって H. Hertz が電磁波をおこしてみせ，その実在を証明し，Maxwell 理論の正しさを示した．彼の理論と実験については別に書いた[10]．ここでは，理論の部分を手短にスケッチしよう．

5.1 双極子からの電磁波

Hertz は巧妙な方法で真空中（$\boldsymbol{j} = 0,\ \rho = 0$）の Maxwell 方程式の解として原点にある電気双極子からの電磁波をつくった[11]．直角座標系で，ベクトル

$$\boldsymbol{\Pi} = \bigl(0,\ 0,\ \Pi(\boldsymbol{r},\ t)\bigr) \tag{5.1}$$

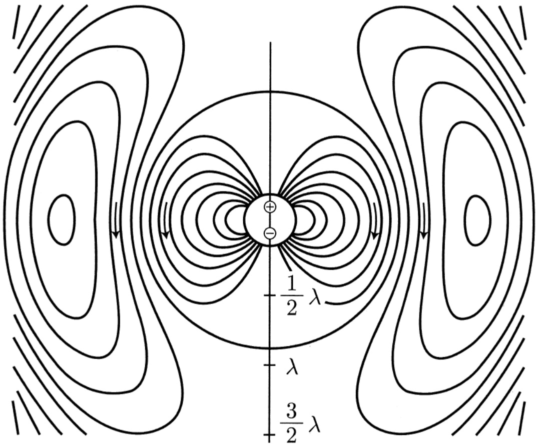


図 4 Hertz の描いた電磁波の（ある一時刻の）電気力線.

から $\boldsymbol{Q} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{\Pi}$ をつくり，電場と磁場を

$$\boldsymbol{E} = \left(\frac{\partial\Pi}{\partial x\partial z}, \frac{\partial^2\Pi}{\partial y\partial z}, \frac{\partial^2\Pi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2\Pi}{\partial y^2}\right), \quad (5.2)$$

$$\boldsymbol{B} = \varepsilon\mu\frac{\partial\boldsymbol{Q}}{\partial t} = \varepsilon\mu\left(\frac{\partial^2\Pi}{\partial t\partial y} - \frac{\partial^2\Pi}{\partial t\partial x}, 0\right)$$

によって定義すると，これらは，Π が波動方程式

$$\left(\Delta - \varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\Pi = 0 \qquad (5.3)$$

をみたせば，Maxwell 方程式をみたすというのである．Hertz は

$$\Pi(r,t) = \frac{p}{4\pi\varepsilon}\frac{\sin(kr-\omega t)}{r} \qquad (5.4)$$

をとった．p は電波の発振のために座標原点においた電気双極子の強さである．ここでは，そしてこれからも極座標 (r, θ, φ) を用いる．この Π は確かに波動方程式 (5.3) をみたす．

図 4 に (5.4) から (5.2) によって計算した電場の（ある一時刻の）電気力線を示す．

5.2 近接場

この電磁場 (5.2) が原点にあって振動している電気双極子によるものであることを Hertz は次のようにして示した．原点に近いところ（$kr \ll 1$）の場を見るのだ．そこでは (5.2) の電場は

$$\boldsymbol{E} = -\frac{p\sin\omega t}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{3xz}{r^5}, \frac{3yz}{r^5}, \frac{3z^2-r^2}{r^5}\right) \qquad (5.5)$$

となる．これは正しく原点にあって角振動数 ω で振動する強さ p の電気双極子の電場である．磁場を計算してみると，原点にある短い電流 $\boldsymbol{I} = -\omega p(0, 0, 1)\cos\omega t$ のつくる磁場に一致することが分かる．

5.3 パラドックス

しかし，変だと思わないか？ Hertz は電流も電荷もない真空中の場を考えて出発した．それなのに，Hertz は座標原点に振動する電気双極子を見出した．これはパラドックスである．その解決には文献[10]を参照．

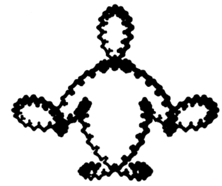
参考文献

1) J.C. Maxwell,「電磁場の動力学」, *Roy. Soc. Trans.* **155** (1865) 459.
2) ファラデー『電気実験』(上), (下), 矢島祐利・稲沼瑞穂訳, 内田老鶴圃 (1980).
3) J.C. Maxwell,「物理的力線について」, *Phil. Mag.* **21** (1861) 161.
4) J.Z. Buchwald, *The Creation of Scientific Effects* (U. of Chicago Press, 1994),
5) H.A. Lorentz, *La theorie electromagnetique de Maxwell et son application aux corp mouvant*, 全集 II, Martinus Nijhof (1937), p.246.
6) H.A. Lorentz, *Versuch einer Theorie der elektlischen und optischen Erscheinungen in bewegter Körper*, 全集 V, Martinus Nijhof (1937), p.1.
7) 広重 徹『相対論の形成』, 西尾成子編, みすず書房 (1980). 特に「電磁場の理論の成立」,「古典電磁気学における場と電荷」を参照.
8) L. Cambell, *The Life of James Clerk Maxwell—Selection from His Correspondence and Occasional Writings*, Macmillan (1884).
9) 広重 徹, 前掲[7].「電気力学を進めた人たち」.
10) 湯川秀樹・鈴木 坦・江沢 洋『場の理論のはなし』, 日本評論社 (2010).
11) H. Hertz, *Electric Waves*, tr. by D.E. Jones Macmillan (1895); Dover (1962).
12) Maxwell も引用している W. Thomson の論文（エーテルの力学的性質）も affection という言葉を使っている. W. Thomsom, *The Cambridge and Dublin math. jour.*, January (1847) 61.

（えざわ・ひろし，学習院大学名誉教授）

アインシュタインと非平衡統計力学

1905年のブラウン運動の論文をめぐって



田崎　晴明

1. はじめに

学生時代,「古典」は好きではなかった．そもそもほとんど読まなかったから，好き嫌い以前のレベルだったというのがより正確だろうが．

教科書や講義（これも正確に言い直せば，講義には出なかったので友人に見せてもらった講義ノート）で，古典的な論文の論法をそのまま紹介する流儀も嫌いだった．設定も仮定も不明確なまま日常言語的な説明が書かれていて，ぼくには理解できない．だが，周囲の友人たちは「あれは直感的で分かりやすい」などと言っている．そういう論法が腑に落ちない者は「物理的センスがない」という暗黙の了解があるようで居心地が悪かった．

大人になりいくつかの古典的な論文に接したが，若かった頃の自分の反応はもっともだったと今でも思う．科学の歴史の転回点では，何を信頼すべきか知らないまま，様々な実験結果と種々の理論的試みの混沌の中から「正しい」道筋を見出さなくてはならない．それは必ずしも論理的な作業ではなく，理詰めを越えた「アクロバット」を伴う知的営為になる．確かに「直観的」かもしれないが，それは「誰にでも理屈抜きで分かる」という意味ではなく，通常は越えられない論理的なギャップを「理屈では説明できない天才的な洞察力で突破する」という意味で直観的なのである．

そんな「知的アクロバット」を，学問の扉を叩いたばかりの若者が味わうのは困難なことではないだろうか？

本稿ではアインシュタインの「古典」の一つである「静止液体中に浮遊する小さな粒子における，熱の分子運動論から要求される運動について」を取り上げる．光量子仮説，特殊相対性理論の論文などとともに「奇跡の年」1905年に発表された．通常は「アインシュタインによるブラウン運動の理論」の論文として知られている．

この論文も，特に前半部は「直感的」に見える．だが，本気で読んで見ると，アインシュタインならではの「アクロバット*1)」がたくさんみつかり，なかなかの曲者（くせもの）だとわかる．ここではそういう解読の一端をお見せした後，凡人にもわかる論法でアインシュタインの議論を再構築してみよう*2)．原論文の非凡さを実感していただけると思う．

2. ブラウン運動とは何か

原論文のタイトルの通り，静止した液体の中に微小な粒子が浮いている状況を考えよう．例えば，コロイド粒子のような，ぎりぎり顕微鏡で見える程度の大きさの粒子を想定している．現代ならポ

*1) アインシュタインの光量子仮説の論文はもっとすごい！輻射のエントロピーの考察から（プランクには想像さえできなかった）光の量子性を結論する流れは，私が知る限り人類が成し遂げた最高級の「知的アクロバット」だ．

*2) ブラウン運動の背景等については文献 1) を見よ．関連する解説を文献 2) に書いたが，その全文を http://www.gakushuin.ac.jp/~881791/docs/BMNESM.pdf から入手できる．統計力学については文献 3) などを参照．

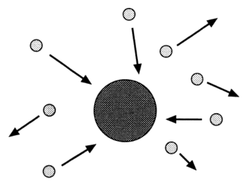


図1　ブラウン運動のイメージ．微小粒子に周囲の液体の分子が次々と衝突してランダムな力を与える．

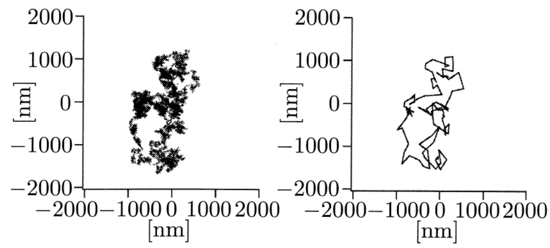


図2　水中での直径 1 μm のプラスティック製小球（ビーズ）のブラウン運動の軌跡．同じ 3.3 秒間の運動について，左は 1/8000 秒ごと，右は 1/30 秒ごとの位置を線で結んだもの（学習院大学西坂研究室提供）．

リスチレン製の直径 1 ミクロン程度のビーズを業者から買って水に溶かせばよい．

液体の分子は温度で決まる速度分布で激しく運動しているが，この熱運動は直接には観察できない．だが，液体に浮かんだ微小粒子には液体の分子が次々とランダムな速度で衝突する（図 1）．微小粒子が十分に小さければ，無数の衝突の影響を受け，モニョモニョと不規則な運動を行なうはずだ（図 2）．これがブラウン運動である．

この現象は 19 世紀前半に植物学者のブラウンによって発見されていたが，アインシュタインはブラウンの研究の詳細を知らず，純粋に理論的な考察からブラウン運動を「再発見」した．アインシュタインの研究の動機は，「分子の個数を数える」つまりアヴォガドロ定数を実験的に決定することだった．20 世紀の初頭には，分子は実在するのか単なる理論的な方便なのかが重要な論争のテーマになっていたのだ．アヴォガドロ定数を複数の実験で決定することは，原子・分子の実在を示すための有効な方向だったのである．

アインシュタインの考察の鍵は (5) の関係だ．微小粒子の「ゆらぎ」を表わす拡散係数 D と，微小粒子の「動きやすさ」を示す易動度 μ が結びつけられている．本稿の最後で見るように，この関係式のおかげで，ブラウン運動を顕微鏡で観察することで「分子が数えられる」のだ．また，「ゆらぎ」と「動きやすさ」を結びつける関係式は非平衡物理学の根幹であり，**揺動応答関係**と呼ばれている．アインシュタインの関係式 (5) は非平衡統計力学における揺動応答関係の最初の例でもある．

3. アインシュタインの論法

原論文の前半に沿って，関係式 (5) を導こう．

微小粒子系の統計力学

1 節は「微小粒子の集団の浸透圧」の考察から始まる．ブラウン運動の論文としては意外な展開だ．

微小粒子を通さないが液体分子を通す半透膜で液体を 2 つに仕切る．一方に微小粒子を入れ（個数密度を ν とする），他方は純粋に液体だけにしておく．もし微小粒子が砂糖の分子なら半透膜には

$$p = kT\nu \tag{1}$$

という浸透圧が働くことが知られている．$k = R/N_\mathrm{A}$ はボルツマン定数（R は気体定数，N_A はアヴォガドロ定数）で，T は絶対温度である*3)．だが，もし微小粒子が（比重がほぼ 1 の）ビー玉くらいの大きさの粒子なら，玉がプカプカ浮いているだけで，浸透圧は働かないだろう．砂糖とビー玉の中間の直径 1 μm 程度の微小粒子ならどうか？

この場合は，砂糖と同じで半透膜に $p = kT\nu$ の浸透圧が働くとアインシュタインは主張する．その根拠として，2 節では，微小粒子の系での浸透圧を統計力学的に導出している*4)．

その結論は「ビー玉程度の大きさの粒子では浸

*3)　原論文では k ではなく R/N（N がアヴォガドロ定数）．

*4)　アインシュタインは，「微小粒子の位置を固定して計算した液体の分配関数は微小粒子の配置には依存しない」ことを仮定する．そして，微小粒子の配置についても積分した全系の自由エネルギーを求め，半透膜の位置を変えた際の変化を見ることで，浸透圧を求めている．これは，古典統計力学の格好の練習問題なので，統計力学を学んだ読者は自分で計算してみると有益だと思う．

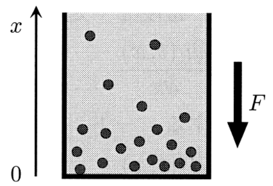


図 3 外力 F の下での平衡状態．微小粒子は「底」にたまるが，液体分子から受けるランダムな力のためにある程度の高さまで分布する．

透圧などない」という事実と矛盾しないのか？ 実は，原理的には，ビー玉ほどの大きさの粒子でもブラウン運動をして浸透圧を生むと考えるべきなのだ．ただし，粒子の動きがあまりにもゆっくりなので，そのような現象は通常の時間スケールでは観測されないのである．逆に言えば，アインシュタインは，適切な微小粒子ならば浸透圧が生まれるまでの時間（平衡状態が達成されるまでの時間）は十分に短いと仮定したということである．

外力の下での平衡

3節では，すべての微小粒子に下方向に F の大きさの力[*5)]（例えば重力[*6)]）が加わった状況を考える．力の大きさは場所に依存してもかまわないのだが，ここでは簡単のため F は定数とする．

液体と微小粒子は有限の容器の中に入っているとしよう．外力 F に引っ張られた微小粒子は容器の底に沈んでいく．しかし，液体分子からのランダムな力を受けるため，容器の底近くで何らかの分布に落ち着くだろう（図 3）．

アインシュタインは，力のバランスと，微小粒子の流れのバランスという 2 つの観点から，この平衡を議論する．容器の底からの高さが x の場所での微小粒子の個数密度を $\nu(x)$ と書こう．

微小粒子に働く力のバランス：微小粒子の集まりを流体と見るマクロな視点に立とう．高さが x のところで水平方向に面積 A をもち，高さが Δx の微小領域を考える．この中には $\nu(x)\,A\,\Delta x$ 個の微小粒子が入っているから，全体に $-F\,\nu(x)\,A\,\Delta x$ の力が働く（上向きの力を正とした）．

このままだと微小粒子全体に加速度が生じるから，これを打ち消す力が必要だ．それは最初に見た浸透圧から来る[*7)]．上と同じ微小領域の上面には下向きに $p(x+\Delta x)\,A$ の浸透圧が働き，下面には上向きに $p(x)\,A$ の浸透圧が働く．合わせれば $-\{dp(x)/dx\}\Delta x\,A$ の力になる（これは正の力）．

外力と浸透圧による力がバランスするから，

$$F\,\nu(x) = -\frac{dp(x)}{dx} = -kT\frac{d\nu(x)}{dx} \qquad (2)$$

となる．最後は浸透圧の表式 (1) を用いた．

早速，アインシュタインならではのアクロバットが目をひく．ここでは，「粒子に働く力学的な力」と「ブラウン運動によって生み出される統計力学的な浸透圧」という全く異質の「力」のバランスを利用していることに注目しよう[*8)]．

微小粒子の流れのバランス：まず，微小粒子を通常の粒子とみなそう．力 F が働けば粒子は加速されていくが，液体中にいるから速度に比例する粘性抵抗を受ける．その結果，外力 F と抵抗がバランスする終端速度で運動していくと考えられる．外力 F が十分に小さければ，終端速度 v_F は F に比例するだろうから，

$$v_F = \mu F \qquad (3)$$

と書く．「動きやすさ」を表す係数 μ を**易動度**（いどうど）と呼ぶ．μ は粒子の大きさや液体の性質に依存する．

各々の粒子がこの終端速度で動けば下向きの粒子の流れ $j_F = -v_F\,\nu(x)$ が生まれる[*9)]．しかし，平衡状態が達成されているのだから，この流れは何か別の流れと打ち消し合わなくてはならない．それは拡散による流れだとアインシュタインはいう．

仮に外力がなく，微小粒子の密度が非一様な $\nu(x)$ だったとする．外力がないので，微小粒子の密度は（個々の粒子のランダムな運動によって）一様

---

*5) 原論文では K．

*6) 正確には重力から浮力を引く必要がある．

*7) 考えている微小領域を半透膜で囲うという思考実験を考えるのがよい．微小粒子の分布が平衡に達していれば，半透膜で囲っても（マクロな）変化は起きないと仮定する．

*8) 実はこの部分の議論で必要なのは，外力下での微小粒子系の位置の平衡分布（沈降平衡）である．しかし，アインシュタインは平衡分布を直接は議論せず，浸透圧を使った「手作り」の議論を進めた．

*9) 粒子の流れ j があると，流れに垂直な断面 A を単位時間あたりに jA 個の粒子が通過する．

な分布に近づいていくはずだ．それによって生じる流れは，密度の傾き $-d\nu(x)/dx$ に比例するだろう．この際の比例係数 D は液体と微小粒子の種類に依存する定数で，**拡散係数**と呼ばれる．拡散係数 D を測る方法については後で考えることにしよう．ともかく，外力がないときには拡散による流れ $j_{\rm diff}=-D\,d\nu(x)/dx$ が生じる．

外力のある系の平衡状態では，拡散による流れと，外力による流れがちょうど打ち消し合う．$j_F+j_{\rm diff}=0$ を書き換えれば，

$$\nu(x)\,\mu\,F=-D\frac{d\nu(x)}{dx} \tag{4}$$

が要請される．

先ほど以上に大胆なアクロバットに気づいただろうか？ 2つの流れがバランスするというが，一方は単独の微小粒子が液体中を終端速度で動くことによる流れで，もう一方は微小粒子の集団の濃度勾配から来る統計的な流れだ．またしても異質なもののバランスが議論されている．おまけに，どちらの流れも微小粒子が担っていることに注意しよう．個々の微小粒子の動きを顕微鏡で見ても2種類の流れを識別できないことをふまえて，この論法を再吟味してほしい．

アインシュタインの関係式：流れのバランスの式 (4) と力のバランスの式 (2) と比較すれば，易動度と拡散係数を結ぶ簡潔な関係

$$D=kT\mu \tag{5}$$

が得られる．**アインシュタインの関係式**である．

最初に述べたように，**平衡状態での「ゆらぎ」と外力下（の非平衡状態）での「動きやすさ」が正確に比例する**ことが示されたのだ．しかも係数にはミクロな熱ゆらぎの大きさを特徴づける普遍的な量である kT が現れた．

拡散方程式と拡散係数

最後に，拡散係数 D を実験的に定める方法について考えておこう．

外力のない状況を考え，無限に広い液体中に多くの微小粒子が浮いているとする．簡単のため，微小粒子の密度 $\nu(t,x)$ は時間 t と x だけに依存するとしよう（$|x|\uparrow\infty$ では $\nu(t,x)\downarrow 0$ とする）．上に書いたように，密度を一定にする方向に，

$$j(t,x)=-D\frac{\partial\nu(t,x)}{\partial x} \tag{6}$$

という流れが発生する．一方，密度は連続の式

$$\frac{\partial\nu(t,x)}{\partial t}=-\frac{\partial j(t,x)}{\partial x} \tag{7}$$

を満たさなくてはならない．単に，微小粒子は生まれたり消えたりしないという関係である（これで全粒子数 $\int_{-\infty}^{\infty}dx\,\nu(t,x)=N$ が時間 t に依存しないことが保証される）．(7) に (6) を代入すれば，

$$\frac{\partial\nu(t,x)}{\partial t}=D\frac{\partial^2\nu(t,x)}{\partial x^2} \tag{8}$$

が得られる．これを**拡散方程式**と呼ぶ．

時刻 $t\downarrow 0$ ですべての粒子が $x=0$ に集中しているような（やや非現実的な）条件での (8) の解は，

$$\nu(t,x)=\frac{N}{\sqrt{4\pi Dt}}e^{-x^2/(4Dt)} \tag{9}$$

となる．密度の分布が $x=0$ を中心に時間とともに広がっていくのがわかる．広がり具合を特徴付けるために x^2 の期待値を求めると，

$$\langle x^2\rangle_t=N^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}dx\,x^2\,\nu(t,x)=2Dt \tag{10}$$

となる．つまり，微小粒子が広がる距離はだいたい $\sqrt{2Dt}$ に等しい．距離が時間の平方根に比例するのが拡散の特徴だ．

4.「凡人向け」の論法

アインシュタインは，外力化での平衡状態という1種類の設定だけを考え，微小粒子を粒子として扱う視点と，微小粒子の集まりをマクロな流体と見る視点を自在に行き来しながら，主要な関係式 (5) をあっさりと導出してしまった．

ここでは，我々凡人向けに，ブラウン運動を最も単純な数理モデルで表現し[*10)]，さらに，3つの異なった設定を比較することでアインシュタインの関係式を再導出してみよう．

*10) アインシュタインも4節で同様の確率モデルを議論しているが，ここではそれには触れない．無論，先駆的な素晴らしい考察だが，「知的アクロバット」ではない．

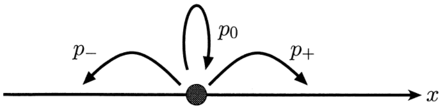


図 4　1 次元のランダムウォーク．粒子は確率 p_- および p_+ で左右に距離 b だけ移動する．

ランダムウォーク：無限に長い 1 次元の空間をランダムウォークする一つの粒子の問題を考える．これは微小粒子のブラウン運動を徹底的に理想化した数学のモデルである．

短い時間間隔 τ と短い距離 b を決める．時間が τ だけ経過するたびに，粒子は，

- 確率 p_+ で右方向に距離 b だけ移動する．
- 確率 p_- で左方向に距離 b だけ移動する．
- 確率 $p_0 = 1 - (p_+ + p_-)$ で元の位置に留まる．

としよう（図 4）．粒子は最初決まった位置（例えば，$x = 0$）にいて，上のルールをくり返し使いながら，ランダムに動いていく．

時間 $t = N\tau$ の間に（つまり，上のルールを N 回使う間に）粒子が右に N_+ 回，左に N_- 回移動したとしよう．移動後の粒子の位置は $x = b(N_+ - N_-)$ である．この x はもちろんランダムな量（確率変数）である．一般に時刻 t でのランダムな量 f の期待値を $\langle f \rangle_t$ と書こう．比較的単純な計算により，

$$\langle x \rangle_t = \frac{b}{\tau}(p_+ - p_-)\,t \tag{11}$$

$$\langle x^2 \rangle_t = \frac{b^2}{\tau^2}(p_+ - p_-)^2 t^2 + \frac{b^2}{\tau}\{p_+ + p_- - (p_+ - p_-)^2\}\,t \tag{12}$$

であることが分かる．

無限系での対称なランダムウォーク：$\delta < 1$ を適当な定数として，$p_+ = p_- = \delta/2$ としよう．左右に移動する確率が等しい，つまり対称なランダムウォークである．微小粒子に外力が働かず，液体からのランダムな力を受けてゆらいでいる状況に対応する．(11), (12) から，

$$\langle x \rangle_t = 0, \quad \langle x^2 \rangle_t = \frac{b^2 \delta}{\tau}\,t \tag{13}$$

となる．移動距離の 2 乗が時間に比例しているから，これは拡散的振舞いだ．(10) と比較すれば，拡散係数は，

$$D = \frac{b^2 \delta}{2\tau} \tag{14}$$

と表される．

無限系での非対称なランダムウォーク：外力がかかった状況を想定し，左右に移動する確率が等しくない場合を扱おう．ただし，系は無限に広がっているとして，「底にたまる」効果は考えない．後の都合のため，左向きに移動する確率がわずかに高い場合を考えることにして，$\varepsilon > 0$ によって $p_+ = \delta(1 - \varepsilon)/2$, $p_- = \delta(1 + \varepsilon)/2$ としよう．(11) がそのまま使えて，

$$\langle x \rangle_t = -\frac{b\delta\varepsilon}{\tau}\,t \tag{15}$$

となる．粒子は平均的には終端速度 $v_F = -b\delta\varepsilon/\tau$ で左向きに動いていくことがわかる．

終端速度がわかったから易動度が出せそうだが，そのためには，外力 F と確率の非対称性 ε の関係を知らなくてはならない．

半無限系での非対称なランダムウォーク：粒子が移動する確率については，非対称な $p_+ = \delta(1 - \varepsilon)/2$, $p_- = \delta(1 + \varepsilon)/2$ を用いるが，今度は粒子が動く範囲に「底」があるとする．これによって平衡状態の問題を考えることができる．

粒子は x が非負の領域だけを動くとしよう．粒子は距離 b だけ跳ぶから，正確には，$x = 0, b, 2b, 3b, \ldots$ という位置にのみいることになる．もっとも「底」の $x = 0$ では，左に移動する選択肢がないので，確率ルールを変更して，

- 確率 p_+ で右方向に距離 b だけ移動する．
- 確率 $p_0 + p_- = 1 - p_+$ で元の位置に留まる．

とする．

このルールで確率的に時間発展させて十分に長い時間が経つと，粒子の存在確率がもはや変化しない平衡状態が達成される．平衡状態において粒子が位置 x に存在する確率を P_x と書こう．

平衡に達しているということは，$x = b, 2b, 3b, \ldots$ すべてについて

$$P_x = p_+ P_{x-b} + p_- P_{x+b} + p_0 P_x \tag{16}$$

が成り立つということだ．右辺は粒子の存在確率が P_x の状況から，時間発展のルールを一回適用したあとでの確率である*11)．これらの和が次の瞬間における確率を与えるわけだが，すでに平衡に達しているため，左辺も P_x としたのである．一番「底」の $x=0$ では移動のルールが変わるので，平衡の条件は

$$P_0 = p_- P_b + (p_0 + p_-)P_0 \tag{17}$$

となる．

(16), (17) を満たす P_x は簡単に見つかり，

$$P_x = C\left(\frac{p_+}{p_-}\right)^{x/b} = C\left(\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^{x/b} \tag{18}$$

である（C は何らかの正定数）．一方，統計力学により外力下での平衡分布は

$$P_x = Z^{-1}\, e^{-Fx/(kT)} \tag{19}$$

であることがわかっている（Z は規格化定数）．$\varepsilon \ll 1$ のとき (18) は $P_x \simeq A\, e^{-2\varepsilon x/b}$ と書けるから，(19) と比較して $2\varepsilon/b = F/(kT)$ となる．よって，$v_F = -\mu F$ によって易動度 μ を定義すれば，

$$\mu = \frac{\delta b^2}{2kT\tau} \tag{20}$$

が得られる．拡散係数の表式 (14) と比較すれば，アインシュタインの関係式 (5) が導かれる．

5. アヴォガドロ定数の決定

最後に，アインシュタインの論文の 5 節に戻り，アインシュタインの関係式 (5) を用いてアヴォガドロ定数 N_A を評価する方法について述べよう．

これまで易動度 μ は未知の量（あるいは，実験で測るべき量）として扱ってきた．ところが，液体中の球状の粒子については，流体力学のストークスの理論があり，易動度は

$$\mu = \frac{1}{6\pi\eta a} \tag{21}$$

と表される．ここで η は液体の粘性係数で，a は粒子の半径である*12)．アインシュタインは，この関係が a が $1\,\mu\mathrm{m}$ 程度の微小粒子にも使えるだろうとした．これは大胆な仮定だ！

こうすると，アインシュタインの関係式 (5) は

$$D = \frac{kT}{6\pi\eta a} \tag{22}$$

となり，拡散係数が温度に比例することがわかる．

アインシュタインにとってより重要だったのは，ここに $k = R/N_\mathrm{A}$ を代入して得られる

$$N_\mathrm{A} = \frac{RT}{6\pi\eta a D} \tag{23}$$

という関係である．左辺はアヴォガドロ定数．1 モル中の分子の個数であり，どんな高性能の顕微鏡を使っても直接には測定できない量だ*13)．ところが，右辺に登場する R はマクロな熱力学の定数，T は温度計で測れる絶対温度，η は液体中の球体の運動から測れるマクロな定数であり，さらに，微小粒子の半径 a と拡散係数 D もコロイド粒子を顕微鏡で観察すれば実測できる量だ．つまり，マクロな測定と顕微鏡を用いた測定だけで，分子の個数を数えることができるのだ！

アインシュタインのこの提案を受けたペランは，コロイド系でのブラウン運動の精密な測定を行なった．その結果，他の方法で求められたのと近いアヴォガドロ定数の値が得られ，それは原子・分子の実在の極めて強い証拠とみなされることになる．このあたりの詳しい歴史については文献 1) などをご覧いただきたい．

*11) 第一項はもともと $x-b$ にいて右に移動した過程，第二項はもともと $x+b$ にいて左に移動した過程，そして第三項はもともと x にいて移動がなかった過程に対応する．

*12) 原論文では，η, a は，それぞれ k, P.

*13) 現代では結晶の中の原子数を X 線散乱などで測定することで，N_A の直接の測定も可能になっている．

参考文献

1) 江沢洋『だれが原子をみたか』（岩波書店，1998 年）．
2) 日本物理学会編『アインシュタインと 21 世紀の物理学』（日本評論社，2005 年）．
3) 田崎晴明『統計力学 I』（培風館，2008 年）．

（たざき・はるあき，学習院大学理学部）

特殊相対論

時間の性質



岡村　浩

1. はじめに：あるうるわしい日

20世紀，物理学は圧倒的に変わりました．**相対論**と**量子論**が変革の口火を切り，それが組み合わさって現代の科学技術の重要な部分が成立しました．物理学の変革としては量子論の方が重要ですが，相対論の衝撃が重要であることを否定するものではありません．その立役者のアインシュタインが20世紀最大の物理学者であることに異議を唱える人は少ないでしょう．

ここではアインシュタインの1905年の論文をご紹介します．この論文は相対論の口火を切った論文です．この論文の性格を表すアインシュタインの告白をまずご紹介しましょう*1)．

「ところがベルンにいた一人の私の友人が偶然に私を助けてくれました．あるうるわしい日でした．私は彼を訪ねてこう語りかけたのです．

『私はちかごろどうしても自分にわからない問題を一つ持っている．今日はお前のところにその戦争を持ち込んで来たのだ』と．私はそしていろいろな議論を彼との間に試みました．私はそれによって翻然と悟ることができました．次の日に私はすぐもう一度彼のもとに行って，そしていきなり言いました．

『ありがとう．私はもう自分の問題をすっかり解いてしまったよ．』

私の解というのは実に時間の概念に対するものであったのでした．つまり時間は絶対（的）に定義せられるものではなく，時間と信号速度との間に離すことのできない関係があるということです．以前の異常な困難はこれで初めてすっかり解くことができたのでした．」

「この思いつきの後5週間で，今の特殊相対論が成り立ったのです．」

この，5週間後にできた論文がこれからご紹介する論文です*2)．

2. 動いている物体の電気力学：「わからない問題」

この論文は三つの部分から成り立っています．最初は短いまえがきです．第一部が**運動学の部**で時間と空間についての新しい考え方が示されます*3)．それによって第二部の**電気力学の部**で前述の「わ

*1) アインシュタインが日本にきたときの京都大学での講演の一部です．石原純著，岡本一平画『アインスタイン教授講演録』改造社（1923），p.139, 同『アインシュタイン講演録』東京図書（1971），p.82.

*2) Zur Elektrodynamik bewegter Körper von A. Einstein, *Annalen der Physik* **17** (1905): 891–921. 石原純，山田光男，遠藤美壽，阿部良夫訳『アインスタイン全集第壱巻』，改造社（1923）．内山龍雄訳・解説『アインシュタイン相対性理論』，岩波文庫（1988）（これを文献1）と呼びます）．

*3) やがてこの考え方から，粒子が高速で運動する場合に適用される新しい力学が生まれました．

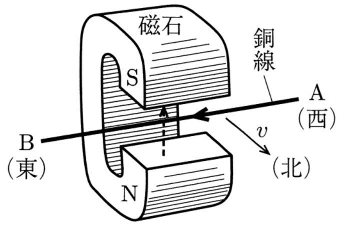


図 1　銅線を動かした場合.

からない問題」を解決します[*4)].

その問題は何でしょうか．それは電磁気学についての問題です．それはアインシュタインがもっと若い頃に考えた，光を追いかけたらどうなるかという疑問に始まります．光を追いかけたらどうなるでしょう．光に次第に追いついて，光と並んで走ったら光が止まってみえるでしょうか．そんなはずはない，とアインシュタインは考えました．やがてその疑問は電磁気学を，止まっている座標系で考える場合と，それに対して一定の速度で動いている座標系で考える場合とが同じかどうかという問題に発展しました．オランダの物理学者ローレンツはそれについての進んだ考え方を発表していましたが，アインシュタインは満足できず，すでに1年も悩み続けていました．その一つの例がまえがきに示してあります．

第1図をごらん下さい[*5)]．磁石があって下にN極，上にS極があって下から上という向きの磁場ができます．磁場について垂直な方向に図1のように東西方向に銅線を張ります．銅線の中には正の電荷の粒子がいると考えます．

さてこの銅線を北に向かって動かします．

このとき，銅線の中に起電力[*6)]が発生して西から東へ電流が流れます．

今度は銅線は止めておいて磁石を逆方向（南に向かって）同じ速度で動かします．すると銅線の場所の磁場は減ります．磁場が減るとファラデーの電磁誘導の法則で電場ができます．そうすると銅線に沿って電流が流れます．

これは，実際に磁石を動かすのではなくて，単に観測する人が銅線と一緒に動いたと考えることもできます．流れる電流はどちらも同じはずですが，その説明がこんなに違ってよいものでしょうか．

この論文が，相対性理論という題名ではなくて，「動いている物体の電気力学」という題であるのはそういう事情です．とりあえずそのことを漠然とでもご理解下さい．

3. 時間と空間：時間とは何かという悟り

それでは論文の大事な部分を紹介します．第一部は「I. 運動学の部」という題です．

§1. 同時刻の定義

それまでのニュートンの力学では時間はあらゆる場所で同じように滔々と流れていると考えます．それ以上，ややこしいことは一切考えません．ところがアインシュタインは場所によって時間が違うかもしれないと考えます[*7)]．そういう可能性があったとき，A という場所での時計と B という場所の時計を合わせるにはどうしたら良いでしょうか．

光を使うのがいいと考えられます．

光が A を出る時間を t_A, その光が B に着く時間を t_B, その光がすぐにもどって A に着く時間を t'_A とします．そして

$$t_\mathrm{B} - t_\mathrm{A} = t'_\mathrm{A} - t_\mathrm{B}$$

という関係が成り立つと考えます．こうすれば当然

$$\frac{1}{2}(t_\mathrm{A} + t'_\mathrm{A}) = t_\mathrm{B}$$

*4)　この段階ではマックスウェルの電磁気学は変更されませんでした．この時代はまた，量子論の始まりの時代でもありました．

*5)　文献 1)，p.103 にあります．「銅線」はそこでの表現．

*6)　起電力（elektromotorische Kraft）は電位差を意味しますが，アインシュタインは起電力をローレンツの提唱した「粒子の電荷」「銅線の速さ」「磁場の強さ（磁束密度）」の積に比例する力の意味で使うことがあります．文献 1) の p.13, p.44 をごらん下さい．ちなみに石原純訳では電動力または動電力としてありました．

*7)　アインシュタインは友達と「オリンピア・アカデミー」と称して物理学や哲学のいろんな本を読みました．時間を定義するに当たっての，「私が“あの列車は 7 時にここに到着する”と言ったとき，それは“私の時計の短針が 7 を指すということと，列車の到着とは同時刻に起こる出来事である”ということを意味する．」といった表現は，マッハが力学の批判的検討の中で，慣性質量を衝突の実験によって定義したことを思い出させます．

が成り立ちます．これが必ず成り立っていれば，A での時計と B での時計が合っていると言えます．

また A と B の距離を $\overline{\mathrm{AB}}$ としますと，往復の距離を往復の時間で割った値が光の速さ c, すなわち

$$\frac{2\overline{\mathrm{AB}}}{t'_{\mathrm{A}}-t_{\mathrm{A}}}=c$$

が成り立ちます．

§2. 長さと時間の相対性

次第に論文の核心にはいります．まずこの論文が仮定する二つの原理を述べます*8)．二つの原理の第一は「**相対性原理**」です．

> **1.**「互いに他に対して一様な並進運動をしている，任意の二つの座標系のうちで，いずれを基準にとって，物理系の状態の変化に関する法則を書き表そうとも，そこに導かれる法則は，座標系の選び方に無関係である.」

ニュートン力学はこの原理を満足しています．マックスウェルの電磁気学もこの原理を満足しています．

第二の原理は「**光速*9)不変の原理**」です．

> **2.**「ひとつの静止系を基準にとった場合，いかなる光線も，それが静止している物体，あるいは運動している物体のいずれから放射されたかには関係なく，常に一定の速さ c をもって伝播する.」*10)

ここで光の速さは

$$\text{速さ}=\frac{\text{光の進んだ距離}}{\text{伝播に要した時間}}$$

によって定義されます．

これはマックスウェルの電磁気学とは相性が良いのですが，ニュートン力学の常識とは違います．ニュートン力学の常識では動いている物体を追いかけたり追い越したりできるのですが，それが光に対してはできないのです．

そこで §1 のように場所 A と場所 B の時計を合わすことができるか考えてみます．棒の先端を A, 後端を B とします．棒は速度 v で走っています．r_{AB} は走っている棒を静止系から眺めた場合の長さです．

$$t_{\mathrm{B}}-t_{\mathrm{A}}=\frac{r_{\mathrm{AB}}}{c-v}.$$

速度 c で走る光を速度 v で追いかけるので分母が小さくなります*11)．

$$t'_{\mathrm{A}}-t_{\mathrm{B}}=\frac{r_{\mathrm{AB}}}{c+v}.$$

光が棒と逆向きに走るので分母が大きくなります．

したがって，棒と一緒に走っている観測者から見るとき，A, B 二つの時計は合っていません．そこで，同時刻という概念に，絶対的な意味を与えられないことになります．ある座標系（今の場合は静止系）で同時だったとしても，別の座標系では同時と見なされないということがあるのです．ここが，あのうるわしい日にひらめいたことだと思われます．

§3. 静止系から，これに対して一様な並進運動をしている座標系への座標および時間の変換理論

静止系（K）*12)での空間・時間を x,y,z,t, それに対して x 方向に速度 v で動いている座標系（k）での空間・時間を ξ,η,ζ,τ で表します．後者は各々前者に対応するギリシャ文字です．

座標系 k で，光が時刻 τ_0 で発射され，時刻 τ_1 で反射され，時刻 τ_2 に戻ったとします．

$$\frac{1}{2}(\tau_0+\tau_2)=\tau_1$$

で時計が合います．

時間 τ を x',y,z,t で表す式を求めます．すなわち $\tau=\tau(x',y,z,t)$, 但し $x'=x-vt$ です．

$$\frac{1}{2}\left\{\tau(0,0,0,t)+\tau\left(0,0,0,t+\frac{l'}{c-v}+\frac{l'}{c+v}\right)\right\}$$

*8) まえがき部分にも触れてありましたが，重複するのでここにまとめました．

*9) 速度と速さは区別されるべきなのでこの方が良いでしょう．

*10) 江沢洋先生によれば，質点の速さに上限があるとして，上限の速さの質点を使って時計合わせをすれば，マックスウェル方程式の共変性から光の速さは質点の上限に等しいことが導け，さらに力学を共変的に作り直せば，質点の速さは光の上限を超えないことが導けるそうです．

*11) ここには書いてありませんが，v は c を超えないと考えます．

*12) Koordinatensystem.

$$= \tau\left(l', 0, 0, t + \frac{l'}{c-v}\right).$$

但し，l' は発射点と反射点の K 系から見た距離です[*13)]．l' を無限小としますと[*14)]

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{c-v} + \frac{1}{c+v}\right)\frac{\partial\tau}{\partial t} = \frac{\partial\tau}{\partial x'} + \frac{1}{c-v}\frac{\partial\tau}{\partial t}.$$

整理しますと[*15)]

$$\frac{\partial\tau}{\partial x'} + \frac{v}{c^2-v^2}\frac{\partial\tau}{\partial t} = 0.$$

同様な議論を y, z 方向について行うと[*16)]

$$\frac{\partial\tau}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial\tau}{\partial z} = 0.$$

以上の式および τ は x', t の 1 次式と考えられることから

$$\tau = a\left(t - \frac{v}{c^2-v^2}x'\right).$$

但し a は v の未知の関数である．

$\tau = 0$ の瞬間に $\xi = 0$ から光が ξ の増加する方向に発射されたとすると

$$\xi = c\tau.$$

したがって

$$\xi = ac\left(t - \frac{v}{c^2-v^2}x'\right).$$

一方 K 系から見ると，k 系の原点に対する光の先端の相対速度は $c-v$ なので

$$\frac{x'}{c-v} = t$$

です．

t を消去すると，整理して[*17)]

$$\xi = a\frac{c^2}{c^2-x^2}x',$$

$$\eta = c\tau = ac\left(t - \frac{v}{c^2-v^2}x'\right),$$

$$\frac{y}{\sqrt{c^2-v^2}} = t, \quad x' = 0^{*18)},$$

$$\eta = a\frac{c}{\sqrt{c^2-v^2}}y, \quad \zeta = a\frac{c}{\sqrt{c^2-v^2}}z.$$

ここで $x' = x - vt$ を代入して整理します[*19)]．

$$\tau = \varphi(v)\beta\left(t - \frac{v}{c^2}x\right),$$

$$\xi = \varphi(v)\beta\,(x - vt),$$

$$\eta = \varphi(v)y, \quad \zeta = \varphi(v)z,$$

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \quad \varphi(v) = \frac{a(v)}{\sqrt{1-(v/c)^2}}.$$

球面波 $x^2+y^2+z^2 = c^2t^2$ が $\xi^2+\eta^2+\zeta^2 = c^2\tau^2$ に対応します[*20)]．

[$\varphi(v)$ の決定]

あとは $\varphi(v) = 1$ を証明するだけです．まず，動いている座標系に対して速度 $-v$ で戻る変換をすると元の座標系になるべきだということから

$$\begin{aligned}
t' &= \varphi(-v)\cdot\beta(-v)\left(\tau + \frac{v}{c^2}\xi\right) \\
&= \varphi(v)\cdot\varphi(-v)t, \\
x' &= \varphi(-v)\cdot\beta(-v)\,(\xi + v\tau) \\
&= \varphi(v)\cdot\varphi(-v)x, \\
y' &= \varphi(-v)\eta = \varphi(v)\cdot\varphi(-v)y, \\
z' &= \varphi(-v)\zeta = \varphi(v)\cdot\varphi(-v)z
\end{aligned}$$

となり，

$$\varphi(v)\cdot\varphi(-v) = 1$$

が導けます．

次に棒の先端と後端が各々

$$x_1 = vt, \quad y_1 = \frac{l}{\varphi(v)}, \quad z_1 = 0,$$

$$x_2 = vt, \quad y_2 = 0, \quad z_2 = 0$$

で表せるとして（l は k 系での棒の長さである），棒の軸に垂直に走るとき，棒の長さは v の場合と $-v$ の場合は等しいはずですから

$$\frac{l}{\varphi(v)} = \frac{l}{\varphi(-v)}$$

となります．したがって

$$\varphi(v) = \varphi(-v)$$

---

*13) $\tau_0 = \tau(0,0,0,t), \tau_1 = \tau\left(l', 0, 0, t + \frac{l'}{c-v}\right)$,
$\tau_2 = \tau\left(0,0,0,t + \frac{l'}{c-v} + \frac{l'}{c+v}\right)$.

*14) ϵ_x, ϵ_t が無限小なら
$\tau(\epsilon_x, 0, 0, t+\epsilon_t) = \tau(0,0,0,t) + \frac{\partial\tau}{\partial x}\epsilon_x + \frac{\partial\tau}{\partial t}\epsilon_t$.
このままでもいいのですが，文献 1) の p.69, (10.1) のように $\tau = Ax' + By + Cz + Dt$ とおいて定数 A, B, C, D を求める，とした方がわかりやすいでしょう．
文献 2) では p.22, (1.4.5) 式．

*15) 容易．

*16) $v = 0$ に相当します．

*17) 容易．

*18) 光の先端に対する K 系から見た関係式．
横方向なので $c-v$ が $\sqrt{c^2-v^2}$ に変わります．

*19) 容易．

*20) $(\xi^2 - c^2\tau^2)/\varphi(v)^2 = \beta^2\{(x-vt^2) - (ct - vx/c)^2\} = \beta^2\{x^2(1-v^2/c^2) - (ct)^2(1-v^2/c^2)\} = x^2 - (ct)^2$.

です．$\varphi(v)=\varphi(-v), \varphi(v)\cdot\varphi(-v)=1$ ですから

$$\varphi(v)=1$$

です[*21]．これを各式に代入すれば，結論として

$$\tau=\beta\cdot\left(t-\frac{v}{c^2}x\right),$$

$$\xi=\beta\cdot(x-vt),$$

$$\eta=y,\quad \zeta=z,$$

$$\beta=\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

となります．この関係はローレンツによって導かれていましたのでアインシュタイン変換とは呼ばれず，**ローレンツ変換**と呼ばれています．アインシュタインはこの式を光を伝えるエーテルという不思議な物質とか，理由がなく縮むという勝手な仮定なしに，原理的な考察だけで導いたことが画期的です．

ピタゴラスの定理の証明法が無数にあるように，ローレンツ変換の導き方もいろいろあります[*22]．私のお気に入りの証明もあります[*23]．ここでアインシュタインの論文の導き方を見てきたのは原論文に学ぶという今回の記事の目玉です．詳細は文献 1) をごらん下さい．

第一部の残りは簡単にご紹介します．

§4．動いている剛体，ならびに時計に関する変換公式の物理学的意味

この節は時間の遅れについて述べてあります．色々な方向についてのローレンツ変換を繰り返して，最終的に元に戻る例が示してありますが，これは所謂「時計のパラドックス」に相当します．時計のパラドックスは一般相対論までいかないと十分な議論ができませんから，ここで心配なさらないで下さい[*24]．

§5．速度の合成則

ローレンツ変換を 2 回やるとそれ自体がローレンツ変換です．その意味で数学的な群になっています．単純な速度の和の規則は成り立たず，変換に出てくる速度が c を超えないこともわかります．このことは有名かつ重要なのでどんな相対論の教科書にも書いてあります[*25]．

以上で第一部は終りです．

4．電磁気学の悩みの解決：電場と磁場は座標系で移り変わる．

II．電気力学の部

§6．真空中におけるマックスウェル・ヘルツの方程式の変換．磁場内にある物体の運動に伴って生ずる起電力の性質について

電磁気学の**マックスウェル方程式**は 4 つの方程式の組ですが，アインシュタインはそのうちの 2 つをとりあげます[*26]．この 2 つが電磁場の時間

---

*21）$\varphi>0$ は当然です．

*22）文献 2) 第 2 章など．

*23）(1) $\xi=\gamma(x-vt)$,
(2) $x=\gamma(\xi+v\tau)$,
(3) $x=ct$ と $\xi=c\tau$ が両立する．
以上の 3 つを前提とします．
(3) を (1), (2) に代入すると
$c\tau=\gamma(c-v)t, ct=\gamma(c+v)\tau.$
この 2 つの式の積をとると
$c^2t\tau=\gamma^2(c-v)(c+v)t\tau=\gamma^2(c^2-v^2)t\tau.$
これより $\gamma^2=\frac{c^2}{c^2-v^2}=\frac{1}{1-(v/c)^2}$, $\gamma>0$ なので $\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$.
この γ を (1), (2) に代入すると
$\xi=\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}(x-vt),\ x=\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}(\xi+v\tau).$
最後に, $x=\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}(\xi+v\tau)$ に $\xi=\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}(x-vt)$ を代入した上で整理すると $\tau=\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\{t-(v/c^2)x\}$ が出てきます．
この方法は庄司彦六編『改稿教養物理学』内田老鶴圃新社（1960）p.198 にあったものです．徳永旻，岡村浩共著『現代の古典物理』，産業図書（1975）p.40，拙著，『新訂　相対論』，放送大学教育振興会（2004）p.60 ではこの方法を採っています．
(1) の γ と (2) の γ が同じであることは当然と思いますが，アインシュタインはこれに相当する $\varphi(v)=\varphi(-v)$ を丁寧に証明しています．

*24）文献 2), p.62. 私は大学のサークルでこの論文を読んだことがありますが，そのときは相当心配しました．

*25）文献 2), p.68, p.90.

*26）原論文では

$$\frac{1}{V}\frac{\partial X}{\partial t}=\frac{\partial N}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial z},\quad \frac{1}{V}\frac{\partial L}{\partial t}=-\left(\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z}\right),$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial Y}{\partial t}=\frac{\partial L}{\partial z}-\frac{\partial N}{\partial x},\quad \frac{1}{V}\frac{\partial M}{\partial t}=-\left(\frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x}\right),$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial Z}{\partial t}=\frac{\partial M}{\partial x}-\frac{\partial L}{\partial y},\quad \frac{1}{V}\frac{\partial N}{\partial t}=-\left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right),$$

文献 1) の現代的な式に従います．真空中なので $\varepsilon_0\mu_0=1/c^2$ の関係を使ってあります．原論文の V はもちろん光速 c のことです．光を追いかけたとき，この式の中の光速 c が変化することは考えにくいですね．

的発展を決める重要な方程式だからです．

一つは**アンペール・マックスウェルの法則**で電流がない場合，もう一つは**ファラデーの電磁誘導の法則**です*27)．

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z},$$
$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x},$$
$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y},$$
$$\frac{\partial B_x}{\partial t} = -\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right),$$
$$\frac{\partial B_y}{\partial t} = -\left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right),$$
$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = -\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right).$$

ローレンツ変換さえ準備してあれば，一定の計算および §3 と似た議論ののち

$$E'_\xi = E_x,\quad B'_\xi = B_x,$$
$$E'_\eta = \beta(E_y - vB_z),\quad B'_\eta = \beta\left(B_y + \frac{v}{c^2}E_x\right),$$
$$E'_\zeta = \beta(E_z + vB_y),\quad B'_\zeta = \beta\left(B_z - \frac{v}{c^2}E_y\right)$$

が導かれます．

この結果は一見複雑ですが，これは電磁場がまとめて**テンソル**という量の成分（厳密に言えば，反対称テンソルで 6 つの独立な成分がある）となっているからです．

これで問題の解決になっていることは文献 1) の訳者補注 {p.79} に譲りますが，電場と磁場を区別することは不適当で，座標系の違いによって一定の法則で電場と磁場が互いに値が移り変わるのです*28)．

§7. ドップラー現象および光行差の理論

ドップラー効果は音の場合がわかりやすいのですが，音源が動く場合と観測者が動く場合とが違う公式なので相対論という意味を考えると妙な気がします．音の場合は空気という媒質が関与するのでこういうことがありえます．

光の場合は媒質がないので相対性が成り立ち，光源が動く場合と観測者が動く場合の公式に違いはありません．

あとは §8 が光線のエネルギー変換則．完全反射する鏡に与える輻射圧の理論，§9 が携帯電流がある場合のマックスウェル・ヘルツの方程式の変換，§10 が加速度が小さい場合の電子の力学，となっていることだけ述べておきます．

5. 相対論の誕生：もっと短く書けたはずだ

この論文の原稿は失われてしまいました．戦争中，アインシュタインはもう一度手で書いてそれを競売にかけ，寄付しました．そのとき，この論文はもっと短く書けたはずだと言ったそうです．

最後に安孫子誠也氏に教わったこと*29) について述べたいと思います．アインシュタインは『自伝ノート』の中で，力学と電磁気学は正確に成り立っていないと書いていました*30)．ところが初期の版では力学と熱力学となっていました．相対論によって電磁気学は変更されませんでしたから，この誤りが放置されたのは無理もないのですが，最近の版では訂正されています．そのすぐあとの部分でアインシュタインは**熱力学の法則**（永久機関が不可能だということを原理とする）をヒントにしたと述べています．

アインシュタインのこの論文には文献が引用されていません．ただあのうるわしい日を共にしたベッソー君への感謝が文末に記してあります．

*27) 積分型のマックスウェル方程式しかご存じない方があるかも知れません．それをいくつかの数学の定理を使って書き換えることができます．

*28) 文献 2), p.190.

*29) 安孫子誠也著『アインシュタイン相対性理論の誕生』講談社現代新書（2004）p.53.

*30) Schilpp 編 “Albert Einstein: Philosopher-Scientist” Open Court Publishing Company (1949), 中村誠太郎・五十嵐正敬訳『自伝ノート』東京図書（1978）p.73.

参考文献

1) 内山龍雄訳・解説『アインシュタイン相対性理論』，岩波文庫 (1988).
2) 江沢洋著『相対性理論』，裳華房 (2008).
3) アブラハム・パイス著，西島和彦監訳『神は老獪にして…—アインシュタインの人と学問』，産業図書 (1987).

（おかむら・ひろし，工学院大学名誉教授）

一般相対性理論の量子論



二宮　正夫

1. はじめに

光速不変の原理と特殊相対性原理の２つの原理に立脚して，アインシュタインが特殊相対性理論を発表したのは奇跡の年と呼ばれる 1905 年のことであった．この特殊相対性理論については前掲の岡村浩先生の詳しい解説があるのでここでは述べない．

特殊相対性理論からちょうど 10 年後の 1915 年にアインシュタインは，この偉大な理論に課されていた制約を自ら打ち破り，一般相対性理論という時間・空間およびその中に存在する物質の存在様式と運動を定める方程式を完成させた．この理論はかつては，現実には応用できない数学的な難解極まりない代物と考えられていた．おおむね 1960 年代から状況は一変する．新しい科学および技術の発展によって，宇宙・天文の観測が精巧になり，実際の宇宙・天文が，一般相対性理論に合致する存在形態と運動をしていることが明らかとなった．さらに理論的研究が精力的に進められ，宇宙のはじまりはビッグバンという一点の大爆発であるというビッグバン理論が発展した．このアイデアは数学的には，宇宙における時空の特異点定理としてペンローズ・ホーキングによって証明された．このような進展に伴い一般相対性理論は時空（時間・空間）そのものの運動，存在形態を決定する物理学の真の基本理論と認識されるに至った．

この基本理論ともう一つの自然の基本理論の量子力学を合体させて量子重力理論（あるいは重力の量子論）をつくり上げる必要がある．しかしながら，1970 年代以来今日まで，多くの研究にも関わらず，一つの例外を除き未だに満足すべき理論ができ上がっていないのが実情である．なぜか？ これら２つの基本理論は原理的に相容れない性質を有する．つまり，アインシュタインの一般相対性理論は，量子化を実行して，量子重力理論を構成すると，くりこみ不可能な理論になってしまう．**アインシュタインの重力理論の作用**は，物質のないとき

$$S_E = \frac{1}{16\pi G}\int d^4x\sqrt{-g}R \tag{1}$$

と書ける．ここで G は（Newton の）**重力定数**で

$$G = (6.670^{32} \pm 0.005) \times 10^{-8}\,\mathrm{cm}^3 \cdot \mathrm{g}^{-1} \cdot \mathrm{sec}^{-2}\,.$$

g は重力場，あるいは**メトリックテンソル** $g_{\mu\nu}$ の determinant $g = \det g_{\mu\nu}$，また R は，**スカラー曲率**でメトリックテンソル $g_{\mu o}$ によって

$$R = R_{\mu\nu}g^{\mu\nu}, \tag{2}$$

$R_{\mu\nu}$ は**リッチテンソル**で

$$R_{\mu\nu} = R^{\alpha}{}_{\mu,\nu\alpha} \tag{3}$$

と**リーマンテンソル** $R^{\alpha}{}_{\mu,\nu\alpha}$ で表される量である．

このリーマンテンソルは

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta,\mu\nu}(x) \;=\; \frac{1}{2}[&\partial_\mu\partial_\beta\partial_{\nu\alpha} \\ &- \partial_\nu\partial_\beta\partial_{\mu\alpha} + \partial_\nu\partial_\alpha\partial_{\mu\beta} \\ &- \partial_\mu\partial_\alpha\partial_{\nu\beta}] \end{aligned} \tag{4}$$

とメトリックテンソル $g_{\mu\nu}$ によって表される．

2. 重力理論の量子化

さて重力理論の作用 S_E, (1) は無次元量であるから，次元解析から $g_{\mu\nu}$ は次元をもつ．一方，場の量子論の一般論にてらすと，場の量がこのような次元を有するときは，散乱振巾，例えば重力場のループから生じる発散（無限大）は，くりこみの処法によってとり除くことができないことが知られている．自然界においては

無限大量は存在しないのであるから，結局アインシュタインの重力理論は，量子論と原理的に両立しないのである．

この深刻かつ重大な問題が示唆することは次の 2 点であろう．

(1) アインシュタインの一般相対性理論つまり重力理論の作用は (1)（および (2), (3), (4)）式で表される．この理論は現在の宇宙・天体をよく記述しているので正しいと信じられる．ただし，現在の宇宙は極めて巨大であり，宇宙・天体での作用 (1) で与えられるアインシュタインの一般相対性理論の験証実験・観測は量子論的なミクロなスケールでなく，いわゆる（量子論と対比して）古典的なマクロな世界のものである．一方初期宇宙のようなミクロな世界においては量子力学が支配している．したがってアインシュタインの一般相対性理論，重力理論の作用 (1) は，ミクロな世界においては量子論と折り合いが良いように，特に無限大の発散がくりこみ処法で解決できるように，(1) の形に変更を加える必要がある．このようなアインシュタインの一般相対性理論に変更を加えるとは，もってのほか，おこがましい，との反発を覚える科学者も多いことであろうが，重力の量子化の研究者にとってはやむにやまれない決断なのである．

しかしながら，現在まで多くの修正案が提案されてきたが，結論的に書くと，満足すべき案はまだ出ていない．修正案は古典的極限，つまりミクロな領域においてはアインシュタインの重力理論の作用 (1) に一致すべきである．

その上で，ミクロの世界においてはくりこみ可能な理論になっている必要がある．このような条件をみたす作用を構成することは大変に難しい．しかしながら研究者は果敢にこの難問に挑戦しているところである．

(2) もっと広い枠組みの理論に，アインシュタインの重力理論が含まれるようにして，全体として整合性がとれているように，新しい理論を構成する．

素粒子理論から，超ミクロの世界あるいはビッグバンによって宇宙が誕生した直後の超初期宇宙を研究している理論物理学者は，この研究方向が正しいとの信念の下に 1980 年頃から精力的に研究を展開している．現在知られているこの大きな枠組みの理論は「**超弦理論**」（あるいは「**超ひも理論**」）である．超弦理論においては自然界の真の基本構成要素はクォーク等ではなく「ひも」あるいは「弦」である．これらのひもは我々が住んでいる時間 1 次元，空間 3 次元の 4 次元時空ではなく **26 次元時空**（25 次元空間と 1 次元時間），あるいは **10 次元時空**（9 次元空間と 1 次元時間）の時空にある．これら，26 次元あるいは 10 次元の時空においてだけ矛盾が何もない超弦理論が構成できることが知られている．

この理論はすべての基本的相互作用，つまり，「**電磁相互作用**」，「**弱い相互作用**」，「**強い相互作用**」，および「**重力相互作用**」の 4 つをすべて含んでいる．またすべての**基本粒子**，クォーク，レプトン，グルーオン，弱い相互作用を媒介するウィークボソン，さらに重力を記述する**グラビトン**を含む．1980 年代以降多くの素粒子理論の科学者が精力的にこの理論を進展させようと研究を行なってきた．この超弦理論は，最新の現代数学を駆使して極めて精巧に構成されてきた．一方では，物理学上の新しい概念も少なからず発見されている．これらについては例えば本誌 2011 年 10 月号の特集「時空と熱力学」を読むことをおすすめする．

3. 一般相対性理論の構成法

本稿は物理系の学部生，院生だけでなく，理工系全般の学生を対象により専門的な本や論文を読むきっかけをもたらすことを目指している．

そこで，この目的に適うテキストなどを紹介しつつそれらを読む上でのポイント，注意すべき点なども記すことにしよう．

(A) 一般相対性理論に関する古典的な著作物

まずアインシュタイン自身が著した『相対性理論』[1)]を挙げよう．アインシュタイン自身の筆になる相対性理論の思想・考え方を記したもので，一読に値する．さらにアインシュタインとインフェルトが著した『物理学はいかに創られたか（上），（下）』[2)]は相対論を含め，物理学を志そうとのモーティベーションを多くの小・中・高・大生に与えてきた名著である．

では，一般相対性理論のテキストはどういうものがあるのだろうか．多数の内外の著作物がある中で筆者が挙げるのは次の 2 冊である．

- 『一般相対性および重力の理論』[3)]
- 『Gravitation and Cosmology: Principles and Ap-

plications of the General Theory of Relativity』[4)]

これら 2 冊は重厚感のある良書と信じる.

ここでこれらの古典を学ぶ上での注意を記しておこう．一般相対性理論は**一般相対性原理**と**等価原理**という 2 つの原理をもとに構成される．アインシュタインの重力理論の作用 (1) にたどりつく道筋には，次の 2 つの方法が用いられる．

(B) 歴史的な構成法

第一は，歴史的な発展の道すじをたどる方法である．等価原理は，特殊相対性理論において選ぶ座標系は慣性系に限定されていた．2 つの慣性系は互いに等速直線運動をしている座標系である．一般相対性理論に至るには，アインシュタインはこの座標系に関する制限を撤廃した．座標系のもとになる考えは，時空全体における各点が一意的に指定できる，いわば人の住む住所のようなものである．そして 2 つの座標系は，一つ目の座標系でのある点の座標値が x^μ で指定されているとすると，二つ目の座標系では同じ点が $f^\mu(x)$ で表せる関係にあるとする．$f^\mu(x)$ は，2 階微分可能な連続関数ならば何でもよい．これをもっと平易に記すと，2 つの座標系はお互いに加速度運動（回転も含む）をしていてもよいのである．このような状況を考えると重力と加速度運動に由来する力とは，区別するべきでなくなる．こうして得られる等価原理は一般的な表現をすると「時空の任意の 1 点の微小近傍において，座標系を適切に選ぶと，この点の微小近傍において重力を消去して平坦な時空にすることができる.」

もう一つの指導原理は，特殊相対性理論が「任意の慣性系があるとき，どの慣性系を選んでも，物理法則は同じ形式に表される」というものであったが，それを一般化していかなる座標系を選んでも物理法則は同じ形式に表されるという一般相対性原理である．

これら 2 つの一般化された原理をもとにアインシュタインの重力理論の作用 (1)，またそれから**アインシュタインの運動方程式**

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = 0 \tag{5}$$

が導かれる．但しここでは簡単のため物質場が何もない場合を書いた．重力場の源となる物質場のある場合は方程式 (5) の右辺はゼロではなく，

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = \kappa T_{\mu\nu} \tag{6}$$

と物質場の**エネルギー運動量テンソル** $T^{\mu\nu}$ と**アインシュタインの重力定数**

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4} = 2.07 \times 10^{-48}\ \mathrm{sec}^2 \cdot \mathrm{g}^{-1} \cdot \mathrm{cm}^{-1}$$

が現れる．

以上は先に挙げた 2 冊のテキストに詳述してある．歴史的に，作用 (1) および運動方程式 (5) または (6) が得られる経過をたどっている．

(C) 四脚場を用いる一般的方法

もう一つの，いわば現代的な相対性理論へのアプローチは**一般座標変換**に対する不変性を**ゲージ対称性**と捉え，この対称性を手がかりに，上記 2 つの原理に基づき一般相対性理論をより一層系統的に，さらに数理物理学的に構成するものである．

このアプローチは，先に挙げた S. Weinberg のテキストに少しふれてあるが，以下に簡潔な要点・注意点をまとめておこう．これによってアインシュタインの重力理論の作用 (1) は，一般論にどのような条件を課せば得られるか，明確になるわけである．

例として自己相互作用，$\frac{1}{4!}\phi^4$ を有するスカラー場（スピン 0 の粒子）を重力を含むように書き表してみよう．まず重力のない平坦な時空におけるスカラー場 $\phi(x)$ の作用は

$$S[\phi] = \int d^4x[\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi)]. \tag{7}$$

ここで，記号を念のため記すと

$$x^\mu = (t, x^i) = (t, \vec{x}) \quad (i = 1, 2, 3),$$
$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla}\right) \tag{8}$$

さらに $\partial^\mu = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu$．ここに $\eta^{\mu\nu}$ は平坦な時空のメトリックである．

$$\eta_{00} = -\eta_{ii} = 1, \quad \eta_{ij} = 0 \text{ for } i \neq j.$$

また $V(\phi)$ はポテンシャル項，この作用における局所的な量は，ラグランジアン（密度）で

$$L = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi) \tag{9}$$

である．体積要素は

$$d^4x = dx^0dx^1dx^2dx^3. \tag{10}$$

さていよいよ，重力を考慮して重力場中のスカラー場の作用を導述しよう．ここで注意点は時空点の変数 x^μ と微分オペレーター ∂_μ を解釈しなおす必要がある．上記では，平坦な座標系を選んでいるので特にそれを

$$\xi^\alpha, \quad (\alpha = 0, 1, 2, 3) \tag{11}$$

と書こう．このときの線要素は

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta. \tag{12}$$

$\eta_{\mu\nu}$ は特殊相対性理論におけるメトリックテンソルであることに注意しよう．これは

$$\eta_{\alpha\beta}\eta^{\beta\gamma} = \delta_\alpha^\gamma \tag{13}$$

をみたす．右辺はクロネッカーのデルタ関数である．

ここでは重要な点は，L を平坦な時空の座標系で表すことである．まず体積要素は

$$d^4x = d\xi^0 d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3. \tag{14}$$

したがって，重力を含むスカラー場の作用は

$$S[\phi] = \int d^4\xi \left[\frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi \cdot \partial_\beta\phi - V(\phi)\right]. \tag{15}$$

ここで注意点は，表式 (15) は最初の作用 (1) と形が似ているため同一と混同してはならない．(15) においては平坦な座標系を選んで積分を行なっているのである．

そこで，ξ^α を任意の（慣性あるいは非慣性）座標系 x^μ で表そう．

$$d\xi^\alpha = \frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}dx^\mu. \tag{16}$$

ここで重要な量を定義しよう．平坦な座標系との間の変換行列は**四脚場**（**vierbein**，あるいは **tetrad**）と呼ばれるもので

$$e_\mu^\alpha(x) \equiv \frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu} \tag{17}$$

で与えられる．この量は，もちろん，x^μ ないしは ξ^α に依存する．添字は，平坦な添字 α と曲がった添字 μ をもつ．(17) の量の逆を定義しよう．

$$\begin{aligned} d\xi^\alpha &= e_\mu^\alpha dx^\mu \\ &= e_\mu^\alpha e_\beta^\mu d\xi^\beta \end{aligned} \tag{18}$$

によって逆四脚場 $e_{\alpha\mu}$ を定義する．これから

$$\begin{aligned} e_\mu^\alpha e_\beta^\mu &= \delta_\beta^\alpha \\ e_\alpha^\mu e_\nu^\alpha &= \delta_\nu^\mu \end{aligned} \tag{19}$$

が成立する．また微分オペレーター ∂_α について

$$\begin{aligned} \partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial\xi^\alpha} &= \frac{\partial x^\mu}{\partial\xi^\alpha}\frac{\partial}{\partial x^\mu} \\ &= e_\alpha^\mu\partial_\mu. \end{aligned} \tag{20}$$

任意の座標系において書き改められた L は

$$L = \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}e_\alpha^\mu e_\beta^\nu\partial_\mu\partial_\nu\phi - V(\phi), \tag{21}$$

あるいは

$$L = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(x)\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - V(\phi) \tag{22}$$

と書く．ここに逆メトリックテンソルを

$$g^{\mu\nu}(x) = \eta^{\alpha\beta}e_\alpha^\mu(x)e_\beta^\nu(x)$$

と記した．

ここに導入したメトリックテンソル $g_{\mu\nu}(x)$ は任意の座標系における線素を求めるのに必要である．

$$\begin{aligned} ds^2 &= \eta_{\alpha\beta}d\xi^\alpha d\xi^\beta \\ &= \eta_{\alpha\beta}e_\mu^\alpha(x)e_\nu^\beta(x)dx^\mu dx^\nu \\ &= g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu. \end{aligned} \tag{23}$$

以上をまとめるとメトリックテンソルは

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\alpha\beta}e_\mu^\alpha e_\nu^\beta(x), \tag{24}$$

逆は

$$g^{\mu\nu}g_{\nu\rho} = \delta_\rho^\mu, \tag{25}$$

体積要素は

$$d^4\xi = J(\xi, x)d^4x \tag{26}$$

とかける．J は，ξ 系から x 系への変換のヤコビアンで

$$J = \sqrt{-\det g_{\mu\nu}} \tag{27}$$

である．以上のことから，重力場中のスカラー場の作用は

$$S = \int d^4x\sqrt{-\det g_{\mu\nu}}\left[\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - V(\phi)\right] \tag{28}$$

と与えられる．重力の効果はすべてメトリックテンソル場 $g_{\mu\nu}$ に含まれる．

4. 相対性理論の対称性

次にこの四脚場を用いる方法で明らかになる事実を以下でまとめてみよう．そのために **Dirac の 4 成分スピノル場**（以下，**ディラック・スピノル場**）ψ を考えよう．重力場のないときのラグランジアン（密度）は

$$L_D = \frac{1}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - \frac{1}{2}(\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu\psi. \tag{29}$$

ディラック・スピノル場は，**ローレンツ変換**の下で

$$\psi \to e^{\frac{i}{2}\epsilon^{\mu\nu}}\sigma_{\mu\nu}\psi. \tag{30}$$

と変換する．ここに変換のパラメータは $\epsilon^{\mu\nu} = -\epsilon^{\nu\mu}$，$\sigma_{\mu\nu}$ は，ローレンツ変換の 6 個の生成元の行列表示

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]. \tag{31}$$

さて等価原理は各時空点において物理法則が特殊相対性理論の法則と見える座標系が存在する，ということであるから，任意の座標から**ポアンカレ群**の座標変換，つまりローレンツ変換と並進，およびディラック・スピノル場の変換 (30) を用いてこの特別な座標系に移ることができる．具体的に書くと，変換は

$$\begin{cases} \xi^\alpha \to \xi^\alpha + \epsilon^\alpha \quad (\text{並進}), \\ \xi^\alpha \to \xi^\alpha + \epsilon^\alpha_\beta \xi^\beta \quad (\text{ローレンツ変換}), \\ \text{および} \\ \psi \to e^{\frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta}}\psi \\ \equiv U(x)\psi \quad (\text{ローレンツ変換}). \end{cases}$$

ここで注意すべきは，変換のパラメーター ϵ^α と $\epsilon^{\alpha\beta}$ は考えている座標 x^μ に依存していることである．このようにディラック方程式を，重力場が存在する場合に一般化するに際しては，ローレンツ変換の下で**局所（Local）不変性**を必要とする．これが等価原理をディラック・スピノルに適用するときの注意すべき点である．

しかしながら，こういう局所不変性のある理論についての扱い方は，**Yang–Mills ゲージ理論**の経験があるため，比較的簡単に実行できる．ディラック・スピノル場に関しては特殊相対性理論の変換

$$\begin{aligned} &\psi \to U\psi, \\ &\partial_\mu\psi \to \Lambda^\nu_\mu U\partial_\nu\psi. \end{aligned} \tag{32}$$

但し，U は x に依存しない，を x に依存するように変える．そのためには，(32) の微分 ∂_μ の代わりに新しい微分

$$D_\alpha = e^\mu_\alpha(\partial_\mu + i\omega_\mu) \tag{33}$$

におきかえる．ここで新たに導入した量 ω_μ は，Yang–Mills ゲージ場の A_μ に対応するもので**接続（connection）**という．このようにすると

$$D_\alpha\psi \to \Lambda^\beta_\alpha U(x) D_\beta\psi \tag{34}$$

となる．ここで Λ_α は 4×4 行列である．さらにここに導入した新しい量 $\omega_\mu(x)$ を

$$\omega_\mu \to \omega'_\mu = -iU(\partial_\mu U^+) + U\omega_\mu U^+ \tag{35}$$

と変換し，四脚場を

$$e^\mu_\alpha \to e^\mu_\alpha = \Lambda^\beta_\alpha e^\mu_\beta \tag{36}$$

と変換するならば，上記の必要な変換性は満足する．

次に接続 $\omega(x)$ をローレンツ群の生成行列で書くと

$$\omega_\mu(x) = \frac{1}{2}\omega^{\alpha\beta}_\mu(x)\sigma_{\alpha\beta}. \tag{37}$$

以上からディラック・スピノルに関する**共変微分オペレーター**は

$$D_\rho = e^\mu_\rho(x)\left[\partial_\mu + \frac{1}{2}\omega^{\alpha\rho}_\mu\right] \tag{38}$$

と Yang–Mills ゲージ理論の共変微分と似た形となる．$\omega^{\alpha\beta}_\mu$ がゲージ場の役割を果たしていることが見てとれる．ここに $X_{\alpha\beta}$ は群 $SO(3,1)$ の生成元である．

従って重力場中のディラック・スピノル場の L は

$$\begin{aligned} L_D \ = \ &\frac{1}{2}\bar{\psi}\gamma^\rho e^\mu_\rho\left(\partial_\mu + \frac{1}{2}\omega^{\alpha\beta}_\mu\sigma_{\alpha\beta}\right)\psi \\ &+ (\text{エルミート共役}). \end{aligned} \tag{39}$$

ここに使った共変微分の交換関係は

$$[D_\alpha, D_\beta] = S^\rho{}_{\alpha\beta}D_\rho + \frac{i}{2}R_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta}X_{\gamma\delta}. \tag{40}$$

右辺に現れる第 1 項の係数 $S^\rho{}_{\alpha\beta}$ は**捩率**（れいりつ）（**torsion**），$R_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta}$ は**曲率**（**curvature**）と言う．さらに捩率は

$$\begin{aligned} S^\rho{}_{\alpha\beta} \ = \ &e^\rho_\gamma(e^\mu_\alpha\partial_\mu e^\gamma_\beta - e^\mu_\beta\partial_\mu e^\rho_\alpha) \\ &+ e^\mu_\alpha\omega^\rho_\beta - e^\mu_\beta\omega^\rho_{\mu\alpha} \end{aligned} \tag{41}$$

と表される．一方リーマン曲率テンソルは

$$R_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta} = (e^\mu_\alpha e^\gamma_\beta - e^\mu_\beta e^\rho_\alpha)(\partial_\mu\omega^{\gamma\delta}_\rho - \omega^{\gamma\gamma}_\mu\omega^{\gamma\delta}_{\rho\gamma}).$$

さて，スカラー曲率は

$$R = R_{\alpha\beta}{}^{\alpha\beta}.$$

また対称な 2 階の対角成分の和がゼロのテンソルはリッチ曲率 $R_{\alpha\beta}$ と呼ばれる．重力場の作用は等価原理からローレンツ不変な形に構成する必要がある．

さて，重力場の作用を構成するためには一考を要する．Yang–Mills 理論にならって，仮に

$$\int d^4\xi R_{\alpha\beta}{}^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}{}^{\alpha\beta} \tag{42}$$

と作るとしよう．これはすべての不変性の条件を満足している．しかしながら，(42) は次の議論から受け入れがたいものである．(42) の被積分関数は長さの次元で勘定して -4 をもつ．すると (42) 全体は次元のない量であるべきだから，係数の結合定数は次元ゼロのものだけが許される．ところが，重力理論において，Newton の重力定数 G は

$$G = (6.670^{32} \pm 0.005)\times 10^{-8}\,\text{cm}^3\cdot\text{g}^{-1}\cdot\text{sec}^{-2} \tag{43}$$

と次元を有する．したがって (42) の形には結合定数 G を係数として導入できないから作用として採用できない．こうして我々はアインシュタインの作用

$$S_E = \frac{1}{16\pi G}\int d^4x \det(e^\alpha_\mu)\cdot R_{\alpha\beta}{}^{\alpha\beta} \tag{44}$$

を得るのである．この S_E は，四脚場 e^α_μ と接続 $\omega^{\alpha\beta}_\mu$ の汎関数（functional）である．ここに構成した作用 (44) は**Palatni 形式**（あるいは**1 次形式**）という．次に運動方程式を導こう．接続 ω の変分からは

$$D_\mu[\det\sqrt{-e}\,(e^\mu_\alpha e^\rho_\beta - e^\mu_\alpha e^\rho_\beta)] = 0, \tag{45}$$

これを ω について解くと

$$\omega^{\alpha\beta}_\mu = \frac{1}{2}e^\gamma_\mu[T^{\alpha\beta}{}_\gamma - T^{\alpha\beta}{}_\gamma - T^{\beta\alpha}{}_\gamma], \tag{46}$$

ここで

$$T^{\alpha\beta}{}_\gamma = (e^\mu_\alpha e^\rho_\beta - e^\mu_\beta e^\rho_\alpha)\times\partial_\rho e^\gamma_\mu, \tag{47}$$

従って接続は**補助場**である．さらに (45) から

$$S^\gamma{}_{\alpha\beta} = 0 \tag{48}$$

が導ける．つまり重力場とスカラー場からなる系では捩率 $=0$ である．今度は四脚場に関して変分をとると運動方程式

$$R_{\alpha\beta}{}^{\gamma\beta} - \frac{1}{2}\delta^\gamma_\alpha R = 0 \tag{49}$$

が得られる．このように物質場がない場合と物質場がスカラー場のときには作用からアインシュタインの運動方程式 (49) が導出できる．

5. 2 つの方法の比較

以上の四脚場を用いた方法と，最初に書いた歴史的経過をたどる通常の方法との関係を説明しておこう．このことによってアインシュタインの一般相対性理論の特質が浮きぼりになる．

このために次の量を考察する．

$$e^\alpha_\mu D_\rho V_\alpha. \tag{50}$$

ここで V_α は任意のベクトルで式 (50) を具体的に書くと

$$e^\alpha_\mu D_\rho V_\alpha = \partial_\rho V_\mu + [e^\alpha_\mu\partial_\rho e^\sigma_\alpha\partial_\rho e^\sigma_\alpha + \omega^\beta_{\rho\alpha}e^\sigma_\beta]\cdot V_\sigma \tag{51}$$

である．ここでこれを簡単に書くために $\Gamma^\sigma{}_{\mu\rho}$ を

$$(51)\ 式 = \partial_\rho V_\mu + \Gamma^\alpha{}_{\mu\rho}V_\sigma \tag{52}$$

と導入する．つまり

$$\Gamma^\alpha{}_{\mu\rho} = e^\alpha_\mu D_\rho e^\sigma_\alpha \tag{53}$$

と定義する．(53) 式の D_ρ は (33) で定義した共変微分である．注意すべきは (52) 式の形は Yang–Mills ゲージ理論における共変微分とアナロガスなオペレーターである．このため，一般相対性理論における新しい共変微分オペレーター ∇_ρ をテンソル $T_{\alpha\rho}$ に対して次のように定義する．まず

$$e^\alpha_\mu D_\rho T_{\alpha\gamma} = e^\alpha_\delta[\partial_\rho T_{\alpha\gamma} - \omega^\delta_{\rho\alpha}T_{\delta\gamma} - \omega^\delta_{\rho\delta}T_{\alpha\delta}], \tag{54}$$

$$T_{\alpha\beta} = e^\sigma_\alpha T_{\alpha\beta} \tag{55}$$

から，

$$\nabla_\rho T_{\mu\gamma} = \partial_\rho T_{\mu\gamma} + \omega^\delta_{\rho\gamma}T_{\mu\delta} \tag{56}$$

によって新しく共変微分オペレーター ∇_ρ を定義するのである．この式から

$$\nabla_\rho e_{\mu\gamma} = 0,\ および\ \nabla_\rho e^{\mu\gamma} = 0 \tag{57}$$

であることがわかる．

ここで (53) で定義した $\Gamma^\alpha{}_{\mu\rho}$ は，μ と ρ に関して対称でないことに注意しておく．さて，この新しい共変微分オペレーターの変換関数を求めよう．

$$[\nabla_\nu, \nabla_\mu] = S^\sigma{}_{\nu\mu}\nabla_\sigma T_\rho \tag{58}$$

と表せる．ただしここで捩率 (41), $S^\gamma{}_{\alpha\beta}$ を新しい形に

$$S^\sigma{}_{\nu\mu} = e^\alpha_\nu e^\beta_\mu e^\sigma_\delta S^\delta{}_{\alpha\beta} \tag{59}$$

と記した．この量はまた，

$$S^\sigma{}_{\nu\mu} = \Gamma^\alpha{}_{\nu\mu} - \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} \tag{60}$$

と書ける．この式から明らかなように捩率は $\Gamma^\sigma{}_{\nu\mu}$ の $\mu\nu$ に関する反対称性成分なのである．また曲率は Γ を用いて

$$R^\alpha{}_{\nu\mu\rho} = \partial_\nu\Gamma^\alpha{}_{\rho\mu} + \Gamma^\lambda{}_{\rho\nu}\Gamma^\alpha{}_{\lambda\mu} - (\mu\leftrightarrow\nu) \tag{61}$$

と表せる．こうして Γ や R の形は通常のアインシュタインの一般相対性理論に現れる量に非常に近いものとなる．

しかしながら，Γ が対称でない点が異なっている．つまり上記の Γ はアインシュタイン理論に現れる**クリストッフェル記号**に等しくない．そのため，$\Gamma^\alpha{}_{\nu\mu}$ が ν,μ に関して対称なものを選ぶ，という条件を付加すれば $\Gamma^\alpha{}_{\nu\mu}$ は，クリストッフェル記号に等しくなり，さらに捩率 (60) はゼロとなる．この場合がアインシュタインの一般相対性理論と合致するのである．現在までの宇宙・天体の観測はことごとくアインシュタインの一般相対性理論に合致する結果を与えている．このため一般的な理論から導いた結果において，捩率 $=0$ という条件を付加しても不都合は生じない．ただし，一般論からは捩率が生じることは記憶しておくべき点

であろう．

もう一つ注意しておくべき重要な事項がある．それはアインシュタインのように Γ をクリストッフェル記号に選ぶ，つまり，捩率 $=0$ と選んだとき重力場だけで物質場を含まない場合の運動方程式 (49) $R_{\alpha\beta}{}^{\gamma\beta} - \frac{1}{2}\delta^{\gamma}_{\alpha}R = 0$ を導き出す作用は

$$S_E = \frac{1}{16\pi G}\int d^4x\sqrt{-g}R \qquad (62)$$

である．

しかしながら，一般論的に等価原理と一般相対性原理にもとづいて，一般的な座標変換（**diffeomorphism**）の下で不変な作用を見出す，という立場からみると上記のアインシュタインの作用 (62) はなお不十分である．

このような不変性を満足する項として (62) 式の右辺に付加できるものがある．それは

$$\frac{1}{16\pi G}\int d^4x\sqrt{-g}\Lambda \qquad (63)$$

で，**宇宙項**とよばれる．また Λ は**宇宙項定数**（略して宇宙定数）とよばれる．こうして，重力場の作用は (62) に (63) を加えて

$$S_E = \frac{1}{16\pi G}\int d^4x\sqrt{-g}(R+\Lambda) \qquad (64)$$

と表される．これから得られる重力場の方程式は

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R - \Lambda g^{\mu\nu} = 0 \qquad (65)$$

である．

歴史的には，アインシュタイン自身が，1915 年に一般相対性理論を発表したのち，(63) の項を加える可能性に気づき導入した．しかし，当時の宇宙モデルや，観測技術の未熟さも手伝ってこの宇宙項の重要さは認知されず，アインシュタイン自身が，(63) を導入したのは生涯最大の誤りと後悔したと伝えられている．現代の物理学における観測においては Λ は極めて小さいながらもゼロでない値を有する結果になっており，重力場の理論は作用として (64)，運動方程式は (65) を採用すべきである．

6. 重力の量子論（量子重力理論）

最後に重力の量子論（または量子重力理論）について簡潔に記しておこう．本稿の最初に記したように現在のところ重力理論を量子論と両立するように，つまり重力の量子論を構成することは極めて困難である．素粒子理論の研究の立場からみて唯一の例外は超弦理論（あるいは超ひも理論）である．この理論自体は 1960 年の終わりに，**南部・H.B Nielsen・L. Susskind** の 3 名がそれぞれ独立に提案したものである．その後 1980 年頃を境に多くの素粒子論研究者を引きつけてやむことのない**唯一可能な統一理論**として連綿と研究が続けられてきている．この理論によると，時空・物質の基本となるのは古代ギリシアの原子論以来の最小の粒子つまり素粒子が存在する，という考え方を根底からくつがえし 1 次元的にのびた弦（あるいはひも）が基本要素と考える．この超弦理論は 10 次元または 26 次元でだけ矛盾なく構成できることが証明されている．我々の時空は 4 次元であるため，残りの 6 次元ないしは 22 次元は，全く別の空間と解釈する必要がある．様々な精巧なモデルが提案されている．この超弦理論において最も焦眉の問題はエネルギーの**基底状態**，つまり**真空**を唯一つ決定するような新しい方法を見出すことといえる．摂動論を用いると数多くの無限個とも言える，**縮退した真空**が現れてしまう．このため非摂動的にユニークに真空を決定する方法・理論が探求されている．テキストとして次の本を挙げておこう．J. Polchinski 著『String Theory I, II』[5]（邦訳あり）．

参考文献

1) 内山龍雄訳・解説：『相対性理論』，岩波文庫（青 934.1）(1988).
2) 岩波純訳：『物理学はいかに創られたか（上），（下）』，岩波新書（R14 および R15）(1963).
3) 山内恭彦・内山龍雄・中野董夫共著：『一般相対性および重力の理論』，裳華房 (1967).
4) S. Weinberg: “Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity”, John Wiley& Sons (1972).
5) J. Polchinski: “String Theory I, II”, Cambridge University Press (1998); 伊藤克司，小竹悟，松尾泰：邦訳『ストリング理論，第 1 巻，第 2 巻』，シュプリンガー・ジャパン (2006).

（にのみや・まさお，岡山光量子科学研究所，京都大学名誉教授）

Heisenberg
行列力学のはじまり



江 沢　洋

ここでは，量子力学への一つの扉を開いた Heisenberg の 1925 年の論文「運動学および力学の関係式の量子力学的な読み替えについて」[1)]を検討したい．もう一つの扉を開いたのは Schrödinger の 1926 年の論文「固有値問題として量子化」[2)]である．前者は行列力学への，後者は波動力学への道を開いたものとして知られている．2 つの道が合流したとき量子力学が成立した．

1. いとぐち

しかし，Heisenberg の論文に入る前に，その論文の拠り所となった N. Bohr の 1913 年の論文「原子と分子の構造について」[3)]を見ておきたい．

N. Bohr は，水素原子の線スペクトルを理解するために，自身が Rutherford のもとで実験した結果に基づき水素原子は原子核のまわりを 1 個の電子が周回しているという構造をもつものとした．そして電子の運動とそれによる光の放出について次の革命的な仮定をおいた：

I.　電子には定常状態とよぶ一連の特別な運動状態のみが許され，この状態にある電子は，加速度をもつにもかかわらず，輻射をしない．この特別な運動状態は，Newton の運動方程式をみたすものから量子条件

$$\oint p(t)\dot{x}(t)dt = nh \quad (n=1,2,\cdots) \qquad (1.1)$$

によって選び出される．ここに x は電子の座標，p はそれに共役な運動量であり，h は Planck の定数

$$h = 6.6261\times 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$$

である．積分は電子の運動の 1 周期にわたる．n は定常状態を番号づける．

II.　実は，電子は，ときに別の定常状態に跳び移る（遷移する）ことがあり，定常状態 n（エネルギー E_n）から定常状態 $n-\tau$（エネルギー $E_{n-\tau}$）に遷移するときには，角振動数

$$\Omega(n, n-\tau) = \frac{E_n - E_{n-\tau}}{\hbar} \quad (\tau = 1, 2, \cdots) \qquad (1.2)$$

の光を放出する．これは角振動数の定まった光であるから線スペクトルとして現象する．

この仮定を，Bohr にしたがって電子が原子核のまわりを等速円運動する場合に適用してみよう．電子の質量を m，電荷を $-e$ とする．

まず，電子の定常状態を定める．円軌道の半径を r，軌道に沿う運動量を p とすれば，運動方程式から

$$\frac{p^2}{mr} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}.$$

よって

$$p^2 r = \frac{me^2}{4\pi\varepsilon_0}. \qquad (1.3)$$

他方，電子の軌道上の定点から軌道に沿って電子の位置までの長さ s を電子の座標とすれば，量子条件は

$$\oint p\dot{s}(t)dt = p\oint ds = p\cdot 2\pi r = nh$$

をあたえる．よって

$$pr = n\hbar \qquad (1.4)$$

が成り立つ．ここで

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.0546\times 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$$

とおいた．(1.3), (1.4) から

$$p_n = \frac{me^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar}\frac{1}{n}, \quad r_n = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{me^2}n^2 \quad (n=1,2,\cdots)$$

表 1 水素原子のスペクトル，$\lambda(n,2)/10^{-7}$ m.

n	理論値	実験値
3	6.5610	6.5628
4	4.8600	4.8613
5	4.3393	4.3405
6	4.1006	4.1017

となる．p と r に状態を示す下つき n をつけた．この状態での電子のエネルギーは

$$E_n = \frac{p_n^2}{2m} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_n} = -\frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \frac{m}{\hbar^2}\frac{1}{n^2} \tag{1.5}$$

となる．

この E_n から (1.2) によって水素原子の出す光の角振動数を計算すると，実験によく合う．角振動数

$$\Omega(n, n-\tau) = \frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \frac{m}{\hbar^3}\left(\frac{1}{(n-\tau)^2} - \frac{1}{n^2}\right) \tag{1.6}$$

でなく波長 $\lambda(n, n-\tau) = \dfrac{2\pi c}{\Omega(n, n-\tau)}$ にして書けば

$$\lambda(n, n-\tau)^{-1} = \left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \frac{m}{4\pi c\hbar^3}\left(\frac{1}{(n-\tau)^2} - \frac{1}{n^2}\right). \tag{1.7}$$

ここに

$$R = \left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \frac{m}{4\pi c\hbar^3} = 1.0974 \times 10^7\ \mathrm{m}^{-1}$$

は Rydberg 定数と呼ばれる．この波長の理論値を実験値[4]と表 1 に比較しておく．この理論値は電子の運動に伴って原子核が動く効果をとりいれるなど補正が必要である．

Bohr の理論では，定常状態にある電子は輻射しないとしているが，これは加速度運動する荷電粒子は電磁波を出すという Maxwell の電磁気学の予言と食い違っている．Maxwell の電磁気学との食い違いは，それだけではない（次の節を見よ）．さらに，Bohr の仮定 I は，運動は運動方程式と任意の初期条件できまるとする Newton 力学に違反している．Newton の力学と Maxwell の電磁気学という物理学の 2 本の大黒柱に背を向けたので，Bohr の仮定 I, II は革命的だといったのである．

2. 対応原理

Maxwell の電磁気学によれば，角振動数 ω で振動する荷電粒子は，同じ角振動数の電磁波を放射する．

しかし，Bohr の量子論では，水素原子の電子は，状態 n から $n-1$ に遷移するとき，角振動数 (1.2)（$\tau = 1$ とおく）の電磁波を放射する．ここでは，電子は原子核のまわりに楕円軌道を描いて運動する場合を考えるが，この場合にも電子のエネルギーは円軌道の場合と同じく (1.5) で与えられる[5]．この電磁波の角振動数 $\Omega(n, n-1)$ は (1.6) で $\tau = 1$ としたものであるが，電子の軌道運動の角振動数とは違う．状態 n の軌道運動の角振動数 ω_n とも状態 $n-1$ のそれ ω_{n-1} とも違っている．

それを見るために，状態 n の軌道運動の角振動数 ω_n を計算してみよう．状態 n の電子は一般に楕円軌道を描き，その長半径 a と短半径 b は[6]

$$a = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{-2E_n}, \qquad b = \sqrt{1-\epsilon^2}\,a = \frac{L}{m^{1/2}}\sqrt{\frac{1}{-2E_n}} \tag{2.1}$$

であるから，軌道の囲む面積は

$$S_n = \pi ab = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{m^{1/2}}\left(\frac{1}{-2E_n}\right)^{3/2} L$$

となる．ここに L は電子の角運動量であって，電子の面積速度は $L/(2m)$ であるから，電子の公転周期は

$$T_n = \frac{S_n}{L/(2m)} = 2\pi\left(\frac{4\pi\varepsilon_0}{e^2}\right)^2 \frac{\hbar^3}{m} n^3$$

となり，公転の角振動数は

$$\omega_n = \frac{2\pi}{T_n} = \left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \frac{m}{\hbar^3}\frac{1}{n^3} \tag{2.2}$$

となる．これは電磁波の角振動数 (1.6)（$\tau = 1$ とする）とは違う．ω_{n-1} にしても違う．

しかし，$n \to \infty$ では

$$\Omega(n, n-1) \sim \omega_n \tag{2.3}$$

となる！ n が大きくなると電子の軌道 (2.1) も大きくなり巨視世界のものとなるから，そのとき電子の出す電磁波が巨視世界の Maxwell 電磁気学の予言に合うのは当然であり，まさにそうあるべきであった．N. Bohr は，一般に量子世界の現象は量子数が大きくなると巨視世界の現象に近づくはずだと指摘した．これを**対応原理**（correspondence principle）という．

$n \to \infty$ では (1.2) の定差は微係数でおきかえることができ

$$\Omega(n,n-1) = \frac{E_n - E_{n-1}}{\hbar} \sim \frac{1}{\hbar}\frac{\partial E_n}{\partial n} = \left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \frac{m}{\hbar^3}\frac{1}{n^3} \tag{2.4}$$

となる．確かに (2.3) が成り立っている．

W. Heisenberg は，この式を逆向きに読んだ．すなわち，

前期量子論で $\dfrac{\partial E_n}{\partial n}$ が現れたら

$E_n - E_{n-1}$ と読み替える． (2.5)

こうすれば，前期量子論の式から正しい量子力学の式が読み取れるというのである．

この対応原理は，以下に見るとおり，原子世界でなりたつ力学原理を見いだすのに導きの石となった．M. Born は，すでに 1924 年に原子世界の力学は巨視世界のものとは異なるとして**量子力学** (quantum mechanics) とよんでいた[7]．それが発見されるまでの模索の時代の理論を前期量子論とよぶ．

2.1 運動の Fourier 分解

前期量子論の第 n 定常状態における運動 $x_n(t)$ を Fourier 分解して

$$x_n(t) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \widetilde{x}(n,\tau)e^{i\omega(n,\tau)t} \tag{2.6}$$

とする．$\omega(n,1) = \omega_n$ は基本振動数で，その整数倍 $\omega(n,\tau) = \tau\omega(n,1)$ は高調振動数である．$x_n(t)$ は実数だから

$$\widetilde{x}(n,-\tau) = \widetilde{x}(n,\tau)^* \quad (^* \text{は複素共役を表わす}) \tag{2.7}$$

となっている．等速円運動の場合，(2.6) の右辺には $\tau = \pm 1$ の 2 項しか現れないが，楕円軌道におけるように電子の速さが変わる場合には $\tau = \pm 2, \pm 3, \cdots$ の項が加わる．

ここに現れた

$$\omega(n,\tau) = \tau\omega_n = \frac{1}{\hbar}\tau\frac{\partial E_n}{\partial n} \tag{2.8}$$

について，Heisenberg は (2.5) を

①前期量子論の $\omega(n,\tau) = \dfrac{\tau}{\hbar}\dfrac{\partial E_n}{\partial n}$ は

$\Omega(n,n-\tau) = \dfrac{E_n - E_{n-\tau}}{\hbar}$ と読み替える (2.9)

と拡張する．ここで

$$\Omega(n,n-\tau) = -\Omega(n-\tau,n) \tag{2.10}$$

となることに注意しておく．

ついでに言えば，後に $\tau\dfrac{\partial\omega(n,\tau)}{\partial n}$ が現れる．これは $\tau\dfrac{\partial}{\partial n}\tau\dfrac{\partial E_n}{\partial n}$ であるから，

$$\frac{\partial^2 E_n}{\partial n^2} = \frac{(E_{n+\Delta n} - E_n) - (E_n - E_{n-\Delta n})}{(\Delta n)^2}$$

にならって，最初の $(\cdots)$ は遷移 $n + \Delta n \to n$ に，第 2 の $(\cdots)$ は遷移 $n \to n - \Delta n$ に対応することから，Heisenberg は①と同様に

前期量子論の $\tau\dfrac{\partial\omega(n,\tau)}{\partial n}$ は

$\Omega(n+\tau,n) - \Omega(n,n-\tau)$ と読み替える． (2.11)

$(E_n - E_{n-\tau})/\hbar$ は $n \to n-\tau$ の遷移で放出される電磁波の角振動数であるから，(2.6) でそれに伴う $\widetilde{x}(n,\tau)$ について

②前期量子論の $\widetilde{x}(n,\tau)$ は

$X(n,n-\tau)$ と読み替える (2.12)

べきことがわかる．そして，Heisenberg は $X(n,n-\tau)$ を遷移 $n \to n-\tau$ の遷移振幅 (transition amplitude) と見て，その絶対値 2 乗が遷移 $n \to n-\tau$ の遷移確率に比例すると考える．(2.6) にならった Fourier 展開

$$X_n(t) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} X(n,n-\tau)e^{i\Omega(n,n-\tau)t} \tag{2.13}$$

に (2.10) を考慮して，$X_n(t)$ が実数値であることから

$$X(n,n-\tau) = X(n-\tau,n)^* \tag{2.14}$$

とすべきことがわかる．

この①，② が，任意の関数 f に対する $f(n,\tau)$，$\tau\dfrac{\partial f(n,\tau)}{\partial n}$ に一般化すれば，朝永[8]のいう“前期量子論の式を量子力学的に読み替えるための暗号解読の鍵”となる．(2.11) は①と同じ内容だから，別の鍵とはしない．

3. 量子条件

前期量子論で使われた量子条件

$$\oint p(t)\dot{x}(t)dt = nh \tag{3.1}$$

を量子力学的に読み替えることを試みよう．Fourier表示

$$p(t) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \widetilde{p}(n,\tau)e^{i\omega(n,\tau)t}, \tag{3.2}$$

$$x(t) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \widetilde{x}(n,\tau)e^{i\omega(n,\tau)t} \tag{3.3}$$

を使う．ここで (2.8) と同様に

$$\omega(n,\tau) = \omega(n,1)\tau \tag{3.4}$$

である．(3.1) に代入すると，

$$\oint p(t)\dot{x}(t)dt = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty}\sum_{-\infty}^{\infty} i\omega(n,\tau')\widetilde{p}(n,\tau)\widetilde{x}(n,\tau') \times \oint e^{i\{\omega(n,\tau)+\omega(n,\tau')\}t}dt.$$

この積分は $p(t)$, $x(t)$ の 1 周期 $2\pi/\omega(n,1)$ にわたって行なうのだが，(3.4) を用いれば

$$\omega(n,\tau) + \omega(n,\tau') = \omega(n,1)(\tau+\tau') = 0$$

のときだけ 0 でなく，

$$\oint e^{i\{\omega(n,\tau)+\omega(n,\tau')\}t}dt = \frac{2\pi}{\omega(n,1)}\delta_{\tau+\tau',0}$$

となる．したがって

$$\oint p(t)\dot{x}(t)dt = 2\pi i \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \widetilde{p}(n,\tau)\widetilde{x}(n,-\tau)\frac{\omega(n,-\tau)}{\omega(n,1)}.$$

再び (3.4) を用いて

$$nh = \oint p(t)\dot{x}(t)dt = -2\pi i \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \widetilde{p}(n,\tau)\widetilde{x}(n,-\tau)\,\tau \tag{3.5}$$

が得られた．

これは前期量子論における量子条件であって，量子力学的に読み替えなければならない．両辺を n で微分すると

$$\frac{h}{2\pi i} = -\sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \tau\frac{\partial}{\partial n}\big\{\widetilde{p}(n,\tau)\widetilde{x}(n,-\tau)\big\}$$

となる．$\widetilde{x}(n,-\tau) = \widetilde{x}^*(n,\tau)$ としてから，鍵①と鍵②を用いて，これは

$$-i\hbar = -\sum_{\tau=-\infty}^{\infty}\big\{P(n+\tau,n)X^*(n+\tau,n)) - P(n,n-\tau)X^*(n,n-\tau)\big\}$$

と読み替えられる．$X^*(n,n') = X(n',n)$ であるから，$\big\{\cdots\big\}$ の第 2 項で $\tau \to -\tau$ と書きかえて

$$-i\hbar = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty}\big\{P(n,n+\tau)X(n+\tau,n) - X(n,n+\tau)P(n+\tau,n)\big\}. \tag{3.6}$$

これが量子条件の量子力学的な表式である．

4. 運動方程式

Heisenberg は，次に量子条件 (3.6) に加えて運動方程式も考慮して $x(t)$ に対応する遷移振幅 $X(n,n-\tau)$ の決定に進む．彼は，簡単な非調和振動子

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) + \delta x(t)^2 = 0 \tag{4.1}$$

を考える．しかし，非調和項が $\delta x(t)^2$ では，たとえ $\delta > 0$ が小さいとしてもポテンシャル $V = (m\omega_0^2/2)x^2 + (m\delta/3)x^3$ が $x \to -\infty$ で $\to -\infty$ となり（図 1），十分に高いエネルギーの粒子は周期運動をすることができない．1928 年になると Gamow が量子力学にはトンネル効果というものがあることを指摘する．そうであれば，粒子はエネルギーによらず周期運動ができない．$x(t)$ は時間に関して (2.6) のようには Fourier 展開できないことになるのである．

これでは困るので，われわれは

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) + \lambda x(t)^3 = 0 \quad (\lambda > 0) \tag{4.2}$$

を考えることにしよう．こういう場面に出会うのも科学史の面白さである．4.3 節からは Heisenberg を離れることになる．

4.1 非可換な積

そうすると，早速 $x(t)^3$ に対応させるべき遷移振幅

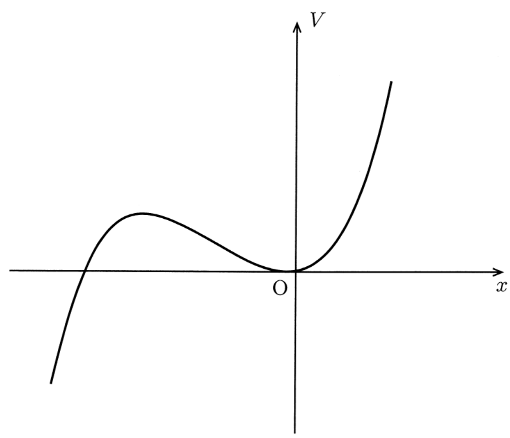


図 1 Heisenberg の運動方程式 (4.1) に対するポテンシャル．$x < 0$ のあるところから先で下り坂になるので周期運動は不可能である．

は何かが問題になる．$x(t)$ には

$$x(t) \longrightarrow X(n,n-\tau)e^{i\Omega(n,n-\tau)t} \tag{4.3}$$

という対応を考えたが，$x(t)^3$ に対応させるべき量子力学的な遷移振幅の $e^{i\Omega(n,n-\tau)t}$ 成分は何か，である．

それを考えるためには，暗号解読の鍵 (2.9)，すなわち $\Omega(n,n-\tau) = \dfrac{E_n - E_{n-\tau}}{\hbar}$ から得られる関係（Ritz の結合原理）

$$\Omega(n,n-\tau') + \Omega(n-\tau',n-\tau) = \Omega(n,n-\tau)$$

が役に立つ．これをにらんで，まず $x(t)^2$ に対しては

$$\begin{aligned}&\sum_{\tau'-\infty}^{\infty} X(n,n-\tau')e^{i\Omega(n,n-\tau)t} \\ &\quad \times X(n-\tau',n-\tau)e^{i\Omega(n-\tau',n-\tau)t} \\ &= \left\{\sum_{\tau'=-\infty}^{\infty} X(n,n-\tau')X(n-\tau',n-\tau)\right\}e^{i\Omega(n,n-\tau)t}\end{aligned}$$

とすれば，これは正しく遷移振幅の $e^{i\Omega(n,n-\tau)t}$ 成分を与える．(4.3) にならって書けば

$$\begin{aligned}x(t)^2 \longrightarrow &\sum_{\tau'=-\infty}^{\infty} X(n,n-\tau')X(n-\tau',n-\tau) \\ &\times e^{i\Omega(n,n-\tau)t}\end{aligned} \tag{4.4}$$

となる．$x(t)^3$ に対しては

$$\begin{aligned}x(t)^3 \longrightarrow &\sum_{\tau',\tau''=-\infty}^{\infty} X(n,n-\tau')X(n-\tau',n-\tau'') \\ &\times X(n-\tau'',n-\tau)e^{i\Omega(n,n-\tau)t}\end{aligned} \tag{4.5}$$

となる．

そういえば，さきに導いた量子条件 (3.6) の右辺がちょうど運動量と位置座標の積に対応する遷移振幅の $e^{i\Omega(n,n)t}$ 成分になっている．

この積は非可換である．実際，(3.6) の量子力学的 $e^{i\Omega(n,n-\tau)t}$ 成分を書くと

$$\begin{aligned}p(t)x(t) \longrightarrow &\sum_{\tau'=-\infty}^{\infty} P(n,n-\tau') \\ &\times Q(n-\tau',n-\tau)e^{i\Omega(n,n-\tau)t}, \\ x(t)p(t) \longrightarrow &\sum_{\tau'=-\infty}^{\infty} Q(n,n-\tau') \\ &\times P(n-\tau',n-\tau)e^{i\Omega(n,n-\tau)t}\end{aligned} \tag{4.6}$$

となって，一般にお互いに等しくない！

4.2 運動方程式の解，$\boldsymbol{\lambda = 0}$ の場合

Heisenberg は遷移振幅も運動方程式をみたすとする．運動方程式 (4.2) に対応する遷移振幅の $e^{i\Omega(n,n-\tau)t}$ 成分は

$$\begin{aligned}&-\left\{\Omega(n,n-\tau)^2 - \omega_0^2\right\}X(n,n-\tau) \\ &+ \lambda \sum_{\tau',\tau''=-\infty}^{\infty} X(n,n-\tau')X(n-\tau',n-\tau'') \\ &\times\ X(n-\tau'',n-\tau) = 0\end{aligned} \tag{4.7}$$

である．まず $\lambda = 0$ の場合

$$\left\{\Omega(n,n-\tau)^2 - \omega_0^2\right\}X(n,n-\tau) = 0 \tag{4.8}$$

を考えよう．この場合には

$$\Omega(n,n-1) = -\Omega(n-1,n) = \omega_0 \tag{4.9}$$

にとれば

$$X(n,n-\tau) = \begin{cases} X(n,n-1) = A_n & (\tau = 1) \\ 0 & (\tau \neq 1)\end{cases}$$

また，(4.9) は $n \to n+1$ とすれば $\Omega(n,n+1)^2 = \omega_0^2$ を与えるから，(4.8) より

$$X(n,n-\tau) = \begin{cases} X(n+1,n)^* = A_{n+1}^* & (\tau = -1) \\ 0 & (\tau \neq -1)\end{cases}$$

が得られる．まとめれば

$$X(n,n-\tau) = \begin{cases} A_n & (\tau = 1) \\ A_{n+1}^* & (\tau = -1) \\ 0 & (\tau \neq \pm 1)\end{cases} \tag{4.10}$$

となる．

A_n を定めるには，量子条件 (3.6) を用いる．それは，いま (4.10) により

$$\begin{aligned}-i\hbar = im\big\{&\Omega(n,n+1)|X(n,n+1)|^2 \\ &-\Omega(n+1,n)|X(n,n+1)|^2 \\ &+\Omega(n,n-1)|X(n,n-1)|^2 \\ &-\Omega(n-1,n)|X(n,n-1)|^2\big\}\end{aligned}$$

であるが，(4.9) により

$$-i\hbar = -2im\omega_0\left\{|X(n+1,n)|^2 - |X(n,n-1)|^2\right\} \tag{4.11}$$

となる．$X(n,n-1)$ は状態の $n \to n-1$ という遷移の振幅であって，$n = 0$ ではこのような遷移はないから $X(0,-1) = 0$ である．そこで (4.11) を $n = 1, \cdots, n$ と並べて書くと

$$|X(1,0)|^2 = \frac{\hbar}{2m\omega_0}$$

$$|X(2,1)|^2 - |X(1,0)|^2 = \frac{\hbar}{2m\omega_0}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$|X(n,n-1)|^2 - |X(n-1,n-2)|^2 = \frac{\hbar}{2m\omega_0}$$

となり，辺々加え合わせると

$$|X(n,n-1)|^2 = \frac{\hbar}{2m\omega_0} n$$

が得られる．よって

$$X(n,n-1) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0} n}\, e^{i\alpha} \qquad (4.12)$$

となる．α は実数位相で，これは遂に定まらない．

4.3 運動方程式の解，$0 < \lambda \ll \lambda_0$ の場合

$0 < \lambda \ll \lambda_0$ の場合には，λ につき 1 次の近似を考えるとして運動方程式 (4.7) の λ がかかった項

$$\lambda \sum_{\tau',\tau''=-\infty}^{\infty} X(n,n-\tau')X(n-\tau',n-\tau'') \times X(n-\tau'',n-\tau)e^{i\Omega(n,n-\tau)t} \qquad (4.13)$$

では $X(n,n-\tau)$ に $\lambda = 0$ の場合の解 (4.12) を用いてよい．

そうすると (4.13) の第一因子が $X(n,n-\tau') \neq 0$ となるのは $\tau' = \pm 1$ のときである．

① いま，$\tau' = 1$ としよう．そのとき (4.13) の第 2 因子が $X(n-1,n-\tau'') \neq 0$ となるのは $\tau'' = 0, 2$ の場合である．

$\tau'' = 0$ の場合には (4.13) への寄与は

$$\lambda|X(n,n-1)|^2 X(n,n-\tau) = \lambda\frac{\hbar}{2m\omega_0} n \cdot X(n,n-\tau) \qquad (4.14)$$

である（$e^{i\Omega(n,n-\tau)t}$ は省く．以下同様）．

$\tau'' = 2$ の場合には，(4.13) への寄与は

$$\lambda X(n,n-1)X(n-1,n-2)X(n-2,n-\tau)$$

であって，$\tau = 1$ でないと 0 になる．$\tau = 1$ の場合には，寄与は

$$\lambda\left(\frac{\hbar}{2m\omega_0}\right)(n-1)X(n,n-1)$$

である．

② $\tau' = -1$ とすると (4.13) の第 2 因子は $\tau'' = 0, -2$ でないと 0 となる．

$\tau'' = 0$ の場合には (4.13) は

$$\lambda|X(n,n+1)|^2 X(n,n-\tau) = \lambda\frac{\hbar}{2m\omega_0}(n+1)\cdot X(n,n-\tau) \qquad (4.15)$$

を寄与する．

$\tau'' = -2$ の場合には (4.13) の寄与は

$$\lambda X(n,n+1)X(n+1,n+2)X(n+2,n-\tau)$$

となり，$\tau = -1$ でないと 0 になる．$\tau = -1$ の場合，寄与は

$$\lambda|X(n+1,n+2)|^2 X(n,n+1) = \lambda\frac{\hbar}{2m\omega_0}(n+2)X(n,n+1).$$

こうして，(4.7) は

$$\tau = 1: \ \left\{\Omega(n,n-1)^2 - \omega_0^2 - \lambda\frac{\hbar}{2m^2\omega_0}3n\right\} \times X(n,n-1) = 0$$

$$\tau = -1: \left\{\Omega(n,n+1)^2 - \omega_0^2 - \lambda\frac{\hbar}{2m^2\omega_0}(3n+3)\right\} \times X(n,n+1) = 0 \qquad (4.16)$$

となる．(4.13) のために振動数 $\Omega(n,n-1)$ が少しずれた：

$$\Omega(n,n-1) = \sqrt{\omega_0^2 + \lambda\frac{3\hbar}{2m^2\omega_0} n} = \omega_0 + \lambda\frac{3\hbar}{4m^2\omega_0^2} n. \qquad (4.17)$$

(4.17) を採用すれば，(4.16) から遷移振幅は

$$X(n,n-\tau) = 0 \quad (\tau \neq \pm 1 \text{のとき}) \qquad (4.18)$$

となる．$X(n,n\pm 1)$ は量子条件から定まる．(4.11) にあたる式は

$$-i\hbar = -2im\left\{\Omega(n+1,n)|X(n+1,n)|^2 - \Omega(n,n-1)|X(n,n-1)|^2\right\}$$

であるから

$$\Omega(1,0)|X(1,0)|^2 = \frac{\hbar}{2m}$$

$$\Omega(2,1)|X(2,1)|^2 - \Omega(1,0)|X(1,0)|^2 = \frac{\hbar}{2m}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\Omega(n,n-1)|X(n,n-1)|^2 - \Omega(n-1,n-2)|X(n-1,n-2)|^2 = \frac{\hbar}{2m}$$

を辺々加えて

$$\Omega(n,n-1)|X(n,n-1)|^2 = \frac{\hbar}{2m} n \qquad (4.19)$$

を得る．

こうして非調和振動子の遷移振幅 $X(n,n\mp 1)$ と遷

移角振動数 $\Omega(n, n \mp 1)$ が定まった．しかし，非調和振動子の運動の振動数 ω_n は Heisenberg の理論には登場せず，定めようがない．

遷移振幅にしても，いまの近似では $X(n, n \mp 1)$ が定まったが，運動方程式 (4.7) から想像されるように $X(n, n \mp 1)$ は $X(n', m')$ の異なる n', m' が複雑に絡み合った式になる．決して (2.13) が示唆するような一つに定まった n をもつ項の和という単純な形には書けない．振動子の運動を時間の経過とともに追うことは Heisenberg の理論ではできないのである[8]．

Heisenberg は原子世界の運動を追うことを放棄するところから出発したのだ．原子世界の運動は直接に見ることはできないという議論を，彼は—1919–20 年というから 19 歳になるかならぬかの頃から—仲間と交わしていた[9]．

遷移角振動数 $\Omega(n, n-\tau)$ は原子スペクトルとして観測できる．遷移振幅は，少なくともその絶対値はスペクトル線の強度として観測できる．Heisenberg は観測にかかる量だけを用いる理論をつくろうとしたのである．

5. エネルギー

運動方程式 (4.7) に対応するエネルギーは，古典的，あるいは前期量子論的には

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}p(t)^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2 x(t)^2 + \frac{\lambda}{4}x(t)^4 \quad (5.1)$$

である．この右辺の第 1 項から順に K, V_0, V_1 とよぶ．

量子力学的には, (5.1) の $(n, n-\tau)$ 成分 $\mathcal{H}(n, n-\tau)$ を計算しなければならない．それには (4.19) を使う．$\tau = 0$ の成分から考えよう．

5.1 $\tau = 0$ の成分

(4.17) と (4.19) を用いて

$$\begin{aligned}K(n,n) &= -\frac{1}{2m}\sum_{\tau'}\Big\{m\Omega(n, n-\tau') \\ &\quad \times X(n, n-\tau')\cdot m\Omega(n-\tau', n)X(n-\tau', n)\Big\} \\ &= -\frac{m}{2}\left\{\Omega(n, n-1)\frac{\hbar}{2m}n \right. \\ &\qquad \left. + \Omega(n+1, n)\frac{\hbar}{2m}(n+1)\right\} \\ &= \frac{\hbar\omega_0}{4}\left\{\left(1 + 3\lambda\frac{\hbar}{4m^2\omega_0^3}n\right)n \right. \\ &\qquad \left. + \left(1 + 3\lambda\frac{\hbar}{4m^2\omega_0^3}(n+1)\right)(n+1)\right\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V_0(n,n) &= \frac{m\omega_0^2}{2}\sum_{\tau'}|X(n, n-\tau')|^2 \\ &= \frac{m\omega_0^2}{2}\left\{\frac{1}{\Omega(n, n-1)}\Omega(n, n-1)|X(n, n-1)|^2 \right. \\ &\qquad \left. + \frac{1}{\Omega(n+1, n)}\Omega(n+1, n)|X(n+1, n)|^2\right\} \\ &= \frac{\hbar\omega_0}{4}\left\{\frac{1}{1 + 3\lambda\frac{\hbar}{4m^2\omega_0^2}n}n \right. \\ &\qquad \left. + \frac{1}{1 + 3\lambda\frac{\hbar}{4m^2\omega_0^2}(n+1)}(n+1)\right\}\end{aligned}$$

これらを加え合わせると λ の 1 次までの近似では，λ に依存する寄与は打ち消し合い

$$K(n,n) + V_0(n,n) = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \qquad (5.2)$$

となる．これに V_1 からの寄与を加えなければならない．

$$\begin{aligned}&V_1(n,n) \\ &= \lambda\sum_{\tau', \tau'', \tau'''}X(n, m-\tau')X(n-\tau', n-\tau'') \\ &\qquad \times X(n-\tau'', n-\tau''')X(n-\tau''', n)\end{aligned} \qquad (5.3)$$

である．この τ' 等に関する和は表 2 によって計算する．

故に

$$V_1(n,n) = \frac{\lambda}{4}\left(\frac{\hbar}{2m\omega_0}\right)^2(6n^2+6n+3). \quad (5.4)$$

したがって

$$\begin{aligned}E_n &= \mathcal{H}(n,n) \\ &= \hbar\omega_0\left(n + \frac{1}{2}\right) + \frac{\lambda}{4}\left(\frac{\hbar}{2m\omega_0}\right)^2(6n^2+6n+3).\end{aligned} \qquad (5.5)$$

この E_n から (2.9) によって振動子が状態 n から状態 $n-1$ に遷移するとき出す光の角振動数を計算してみよう．(5.5) から

$$\begin{aligned}E_{n-1} &= \hbar\omega_0\left(n - \frac{1}{2}\right) + \frac{\lambda}{4}\left(\frac{\hbar}{2m\omega_0}\right)^2 \\ &\qquad \times \left\{6(n^2 - 12n + 1) + 6(n-1) + 3\right\} \\ &= \hbar\omega_0\left(n - \frac{1}{2}\right) \\ &\qquad + \frac{\lambda}{4}\left(\frac{\hbar}{2m\omega_0}\right)^2\left\{6n^2 - 6n + 3\right\}\end{aligned}$$

表2　$V_1(n,n)$ の計算.

τ'	τ''	τ'''	$V_1(n,n)$	値
1	0	1	$X(n,n-1)X(n-1,n)X(n,n-1)X(n-1,n)$	n^2
		-1	$X(n,n-1)X(n-1,n)X(n,n+1)X(n+1,n)$	$n(n+1)$
	2	1	$X(n,n-1)X(n-1,n-2)X(n-2,n-1)X(n-1,n)$	$n(n-1)$
		3	$X(n,n-1)X(n-1,n-2)X(n-2,n-3)X(n-3,n)$	0
			計	$3n^3$
-1	0	1	$X(n,n+1)X(n+1,n)X(n,n-1)X(n-1,n)$	$n(n+1)$
		-1	$X(n,n+1)X(n+1,n)X(n,n+1)X(n+1,n)$	$(n+1)^2$
	-2	-1	$X(n,n+1)X(n+1,n+2)X(n+2,n+1)X(n+1,n)$	$(n+1)(n+2)$
		-3	$X(n,n+1)X(n+1,n+2)X(n+2,n+3)X(n+3,n)$	0
			計	$3(n+1)^2$
			総計	$6(n^2+n)+3$

となるから

$$\Omega(n,n-1) = \frac{E(n)-E(n-1)}{\hbar} = \omega_0 + 3\lambda\frac{\hbar}{4m^2\omega_0^2}\,n. \tag{5.6}$$

(5.6) は前に得ていた (4.17) と一致している！ われながら見事であると思う.

5.2 $\tau = \pm 1$ の成分

$$K(n,n\pm 1) = -\frac{1}{2m}\sum_{\tau'}\Big\{m\Omega(n,n-\tau')X(n,n-\tau') \times m\Omega(n-\tau',n\mp 1)X(n-\tau',n\mp 1)\Big\} \tag{5.7}$$

ただし，本来ならつけるべき時間因子 $e^{i\Omega(n,n\mp 1)t}$ を省く．以下，同様.

右辺の第 1 の $X(n,n-\tau') \neq 0$ のためには $\tau' = \pm 1$ でなければならないが，そのときには第 2 の $X(n-\tau',n\mp 1) = 0$ となる．同じ理由から $V_0(n,n\mp 1)$ も知れて

$$K(n,n\mp 1) = V_0(n,\mp 1) = 0.$$

次に

$$V_1(n,n\mp 1) = \frac{\lambda}{4}\sum_{\tau',\tau'',\tau'''} X(n,n-\tau')X(n-\tau',n-\tau'') \times X(n-\tau'',n-\tau''')X(n-\tau''',n\mp 1)$$

は表 2 のように $X \neq 0$ となる $\tau',\cdots$ の値を順に定めてゆくと最後の $X(n-\tau''',n-\pm 1) = 0$ が知れる．よって

$$V_1(n,n\mp 1) = 0.$$

こうして

$$\mathcal{H}(n,n\mp 1) = 0 \tag{5.8}$$

が結論される．本来なら，この $\mathcal{H}$ には時間因子がついているべきであった．しかし，(5.8) となったので，(5.5) と合わせて

$$\mathcal{H}(n,n-\tau),\ \tau = 0,\pm 1:\quad \text{時間によらない} \tag{5.9}$$

一般に，すべての n と τ に対して $\mathcal{H}(n,n-\tau)$ が時間によらない場合，これは系のエネルギーが保存されることを意味すると解釈される[8)].

われわれの問題では，表 3 の $V_1(n,n\mp 1)$ のコラムの各行，最後の X を $X(n-\tau''',n-\tau)$ に替えてみれば $V_1(n,n\mp 2)$, $V_1(n,n\mp 3)$ に 0 でないもののあることがわかる．これは $\mathcal{H}(n,n-\tau)$ 1 に時間に依存する成分があることを意味する．この系ではエネルギーは保存されるはずなのに何故だろう？

6. 疑問

すでに前節で一つの疑問に逢着したが，もっと大きな疑問がある.

それは，Heisenberg が何故，遷移振幅が運動方程式をみたすと考えたか，だ.

われわれは，運動方程式を解いて遷移振動数 $\Omega(n,n-\tau)$ を決定し，量子条件を併用することによって遷移振幅を決定した，それを用いて系のエネルギー E_n を決定し，Bohr の振動数条件を用いて遷移振動数を決めてみたら，運動方程式からきめたものと一致した．これは運動方程式を用いたことに根拠があったことを意

表 3　$V_1(n, n \mp 1)$ の計算.

τ'	τ''	τ'''	$V_1(n, n \mp 1)$	値
1	0	1	$X(n,n-1)X(n-1,n)X(n,n-1)X(n-1,n\mp 1)$	0
		-1	$X(n,n-1)X(n-1,n)X(n,n+1)X(n+1,n\mp 1)$	0
	2	1	$X(n,n-1)X(n-1,n-2)X(n-2,n-1)X(n-1,n\mp 1)$	0
		3	$X(n,n-1)X(n-1,n-2)X(n-2,n-3)X(n-3,n\mp 1)$	0
			計	0
-1	0	1	$X(n,n+1)X(n+1,n)X(n,n-1)X(n-1,n\mp 1)$	0
		-1	$X(n,n+1)X(n+1,n)X(n,n+1)X(n+1,n\mp 1)$	0
	-2	-1	$X(n,n+1)X(n+1,n+2)X(n+2,n+1)X(n+1,n\mp 1)$	0
		-3	$X(n,n+1)X(n+1,n+2)X(n+2,n+3)X(n+3,n\mp 1)$	0
			計	0
			総計	0

味するだろう.

しかし, 何故 Heisenberg が遷移振幅に運動方程式を適用したのか, わからない.

もちろん, 量子力学が完成した後には, 量子力学的な粒子の座標と運動量の演算子が運動方程式をみたし, 遷移成分は, 座標演算子の行列要素になるのだから, 運動方程式をみたすのは当然である.

それは, そのとおりだが, Heisenberg は $X(n, n-\tau)$ が行列要素だという意識もなく, 行列と演算子の関係も知らなかったのだ.

7. その後の発展

M. Born は Heisenberg の導入した計算規則が行列の算法であることを見抜いた. たとえば (3.6) の P, X の乗法

$$\sum_{\tau=-\infty}^{\infty} P(n, n+\tau)X(n+\tau, n)$$

は, $n+\tau=k$ と書いてみると, $P(n,k)$ を n,k 成分とする行列 P と $X(k,n)$ を k,n 成分とする行列 X の積 PX の n,n 成分に他ならない:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} P(n,k)X(k,n) = (PX)(n,n). \qquad (7.1)$$

(3.6) の右辺の第 2 項についても同様で, 第 1 項と第 2 項の合成は行列 PX と XP の引き算になっている. Born は (3.6) の左辺は単位行列 I の $-i\hbar$ 倍の n,n 成分であると推定した. すなわち, (3.6) は行列の関係式

$$-i\hbar I = PX - XP \qquad (7.2)$$

の対角成分だと推定したのである. 彼は, さらに進んで (7.2) は非対角成分についても正しいと考えたが, それは弟子の P. Jordan が次のようにして証明した.

Jordan は $H = P^2/(2m) + V(X)$ として運動方程式 $\dot{X} = \partial H/\partial P$, $\dot{P} = -\partial H/\partial X$ を仮定し $(d/dt)(PX - XP) = 0$ を導き, (4.3) と Ritz の結合原理から

$$\Omega(n,m) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \big\{P(n,k)X(k,m) - X(n,k)P(k,m)\big\} = 0 \qquad (7.3)$$

を得た. $n \neq m$ で $\Omega(n,m) \neq 0$ とすれば証明が終わる.

(7.2) を原理として行列力学[10]が始まった.

参考文献

1) W. Heisenberg, *Zeit. Phys.* **33** (1925) 879.
2) E. Schrödinger, *Ann. Phys.* **70** (1926) 361.
3) N. Bohr, *Phil. Mag.* **26** (1913) 1.
4) 国立天文台編『理科年表』, 丸善.
5) 江沢　洋『量子力学 I』, 裳華房 (2002).
6) 江沢　洋『現代物理学』, 朝倉書店 (1996), §9.4.4.
7) M. Born, *Zeit. Phys.* **26** (1924) 379.
8) 朝永振一郎『量子力学 (1)』, みすず書房 (1952).
9) W. ハイゼンベルク『部分と全体』, みすず書房 (1974). pp.19–23.
10) M. Born und P. Jordan, *Zeit. Phys.* **34** (1925) 858.

(えざわ・ひろし, 学習院大学名誉教授)

現代に至るまでの量子力学

平野 琢也

1. はじめに

アインシュタイン，ポドルスキー，ローゼンが1935年に発表した「物理的実在の量子力学的記述は完全だとみなせるか？」は不思議な魅力に満ちた論文である[1]（以下ではEPR論文と呼ぶ）．そのタイトルからも分かるように，物理学の論文でありながら，量子力学そのものの意味を問い直した哲学的な内容を含んでいる．そして，75年以上前の論文でありながら，忘れ去られるどころか近年ますます注目を集め，その現代的な意味の問い直しが続いている．EPR論文を掲載した米国物理学会のwebページの情報によると（2011年10月15日時点），EPR論文を引用している論文数は3150件であり，そのうち，2011年の引用数は239件である．つまり，現在も1日におよそ1つ，新しく引用した論文が出版されていることになる．この数は，主に英語で書かれた物理学の論文の数なので，それ以外の文章（例えば，日本語による拙文など）を含めると，さらに膨大な数になるだろう．

以下では，EPR論文がどのような内容であるのか，どのような経緯をたどってきたのかについて述べ，そして，なぜ今注目を集めているのかについて考えてみたい．EPR論文に関しては，これまでにも優れた解説があるが[2,3]，本稿では，まず前半で，EPR論文の論理を丁寧に追うことにしたい．

2. EPR状態

EPR論文の書き出しは，**完全な理論**と実在の要素の関係についての言明から始まる．曰く，「完全な理論は，**実在の要素**それぞれに対応する要素をその中に含む（"In a complete theory there is an element corresponding to each element of reality."）．」EPR論文を初めて読んだ人は，実在の要素という概念について，おそらく，まず戸惑いを覚えるだろう．ここでは，実在の要素の説明は次節に譲り，EPR論文で扱われた状態について，最初に紹介する．

EPR論文の第2節では，複合系の波動関数と，その一方の系に対する測定に関する議論が展開されている．具体的には，次式のような2粒子の波動関数を考える（図1参照）．

$$\Psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{(2\pi i/h)(x_1 - x_2 + x_0)p} dp \quad (1)$$

x_1 は粒子1の位置座標，x_2 は粒子2の位置座標であり，x_0 はある定数である．ここで重要なことは，(1)式の波動関数で表される状態にあるとき，粒子1の位置の測定結果と，粒子2の位置の測定結果に強い相関があり，粒子1の位置の測定結果

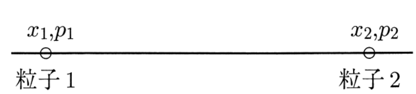


図1 2つの粒子の位置と運動量．

を知れば，粒子２の位置の測定結果を予測できること，同様に，粒子１と２の運動量の測定結果には強い相関があり，粒子１の運動量の測定結果を知れば，粒子２の運動量の測定結果を予測できることである．これらのことを次に説明する．

次式の $u_p(x_1)$ は粒子１の運動量の固有関数である．

$$u_p(x_1) = e^{(2\pi i/h)px_1}. \tag{2}$$

このことは，運動量演算子 $\hat{p}_1 = (h/2\pi i)\partial/\partial x_1$ を (2) 式に作用させると，$\hat{p}_1 u_p(x_1) = p u_p(x_1)$ となることから，固有値 p を持つ固有関数であることが確かめられる．(1) 式の波動関数は，(2) 式を使って，

$$\Psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_p(x_2) u_p(x_1) dp \tag{3}$$

と表すことができる．ここで，$\psi_p(x_2)$ は，

$$\psi_p(x_2) = e^{-(2\pi i/h)(x_2 - x_0)p} \tag{4}$$

であり，固有値 $-p$ を持つ，粒子２の運動量演算子 $\hat{p}_2 = (h/2\pi i)\partial/\partial x_2$ の固有関数である．２粒子の波動関数が (3) 式のように書けるということは，粒子１の運動量を測定して p という値を得たとき，粒子２の運動量の測定値は $-p$ となることを意味する．

同様に，２粒子の波動関数 (1) 式は，粒子１と粒子２の位置の固有関数の重ね合わせとしても書くことができる．粒子１の位置の固有関数は，デルタ関数で表すことができる．

$$v_x(x_1) = \delta(x_1 - x). \tag{5}$$

この関数 $v_x(x_1)$ により，(1) 式は，

$$\Psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_x(x_2) v_x(x_1) dp \tag{6}$$

と書くことができる．ここで，関数 $\varphi_x(x_2)$ は，

$$\begin{aligned} \varphi_x(x_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{(2\pi i/h)(x - x_2 + x_0)p} dp \\ &= h\delta(x - x_2 + x_0) \end{aligned} \tag{7}$$

であり，$\varphi_x(x_2)$ は固有値 $x + x_0$ である粒子２の位置の固有関数である．すなわち，粒子１の位置を測定して x という値を得たとき，粒子２の位置の測定値は $x + x_0$ となる．

以上をまとめると，(1) 式の波動関数で表される状態にある２つの粒子の位置と運動量は強い相関を持っており，粒子１の運動量の測定値が p であれば，粒子２の運動量の測定値が $-p$ となることを，粒子１の位置の測定値が x であれば，粒子２の位置の測定値が $x + x_0$ となることを確実に予言することができる．そして，予言は，粒子１と２が位置が互いに離れている場合でも可能なはずである．この EPR 状態は，**エンタングルした状態**と呼ばれる状態の一種であり，現在盛んに研究されている**量子情報**処理の鍵となる状態である．

■　3. 物理的実在の要素と完全な理論　■

さて，物理的実在の要素（“elements of the physical reality”）とは何かということについて，EPR 論文では，その十分条件が与えられている．すなわち，ある物理量に対応する物理的実在の要素が存在する十分条件は，その物理量の値を，系を全く乱すことなく確実に予言できることである．

例えば，古典力学における質点の運動であれば，初期条件と質点に働く力が与えられれば，後の時刻における質点の位置は，質点の運動を全く乱すことなく，確実に予言することができる．つまり，質点の位置に対応する物理的実在の要素が存在する十分条件は満たされている．

今述べた「物理的実在の要素が存在する」という言葉は，ある理論が完全であるための必要条件を述べるために使われる．その必要条件は，前節の最初に紹介したように，「完全な理論は，存在するすべての物理的実在の要素に対応する要素を，その理論の中に含まなくてはならない」である．また，理論の中のその要素が含まれているときは，その物理量はある値に定まっているとする．

先ほどの質点の運動の例であれば，質点の位置に対応する変数を古典力学が含んでいることである．質点の位置に対応する変数は，その時刻にお

ける質点の位置を表す値をとる．他の物理量の場合，例えば，質点の運動エネルギーも，系を乱すことなく確実に予言できるので，物理的実在の要素が存在するための十分条件を満たしており，力学理論は，それに対応する要素 $\frac{1}{2}mv^2$（m は質量，v は速さで位置を時間微分したもの）を含んでいる．

そして，以上のように，物理的実在の要素が存在する十分条件と，ある理論が完全であるための必要条件を定義すると，これらの定義の枠内で，量子力学は完全な理論ではないことを示すことができる．これが，EPR 論文の内容である．

■ 4. 量子力学は“完全な理論”か ■

この節では，前節の定義に従ったとき，量子力学が“完全な理論”であるかを考察する．ある理論が完全であるかどうかは，その理論が正しいかどうか（その理論の予言が実験結果と一致するかどうか）とは一般には関係がない．ここでは，量子力学は正しいと仮定して，議論を進める．また，重要な仮定として，空間的に離れた事象からは，いかなる影響も受けないという**局所性**が成り立つとする．

量子力学では，状態は波動関数 ψ で表すことができる．もしも，ψ がある物理量 A の固有状態であるならば，すなわち，次式が成り立つのであれば，

$$\psi' \equiv A\psi = a\psi. \tag{8}$$

物理量 A を測定すると，いつでも固有値 a を得ることを，系を乱すことなく，予言できる．前節の定義に従えば，(8) 式の状態にある粒子に対して，物理量 A に対応する物理的実在の要素が存在する．

例えば，x を変数として，ある定数 p_0 を含む波動関数

$$\psi = e^{(2\pi i/h)p_0 x} \tag{9}$$

により粒子の状態が表されるとき，この状態は，粒子の運動量の固有状態（固有値 p_0）である．よって，この波動関数で表される状態にある粒子に対して，運動量に対応する物理的実在の要素が存在する．

一方，式 (9) によって表される状態は，位置の固有状態ではなく，区間 $[a,b]$ に粒子が見出される確率 $P(a,b)$ は，

$$P(a,b) = \int_a^b \psi^* \psi dx = \int_a^b dx = b - a \tag{10}$$

である．すなわち，$P(a,b)$ は，b と a の差のみに依存し，粒子はどの場所でも同じ確率で見出される．つまり，式 (9) の状態にある粒子に対して，どの位置で見出されるか予言することはできない．そのため，運動量が確定した状態では，位置の値は未確定となる．このことは，位置と運動量のように，交換しない 2 つの物理量に対して一般的に成り立つ**不確定性関係**であり，片方の物理量が確定しているとき，もう片方の物理量は未確定となる．

すると，量子力学について，次の二者択一のいずれかでなければならない．命題 (I) 量子力学は完全な理論ではない，あるいは，命題 (II) 交換しない 2 つの物理量に対応する物理的実在の要素が同時に存在することはない．なぜならば，これら 2 つの命題の否定が同時に真であるならば，つまり，量子力学が完全な理論であり，位置と運動量に対応する物理的実在の要素が同時に存在するならば，量子力学は，同時に位置と運動量の物理的実在の要素に対応する要素を含むことになり，これは位置と運動量が同時に定まった値を持つことを意味する．しかし，位置と運動量が同時に定まった値を持つことは不確定性関係に反する．よって，上記の命題 (I) と (II) のどちらかは真でなければならない．

ここで，第 2 節で紹介した EPR 状態について考える．2 つの粒子を互いに遠く離し（x_0 が十分大きい状態を用意し），粒子 1 に対する測定が，粒子 2 に何らの影響も及ぼさないようにすることができるはずである．情報が時空を伝わる速さは有限であり，2 つの事象が空間的に分離されているなら，片方の事象がもう片方に影響を及ぼすこと

はないはずだからである．

さて，(1) 式の波動関数で表される状態にある2つの粒子に対しては，粒子1の運動量を測定したときは，粒子2の運動量の測定値を確実に予言でき，また，粒子1の位置を測定したときは，粒子2の位置を確実の予言できる．このとき，粒子1の測定が粒子2の系に何らの影響も及ぼさないという局所性が成り立つのであれば，粒子2の運動量も位置も，系を全く乱すことなく確実に予言できるといえるだろう．よって，(1) 式の状態に対して，粒子2の運動量も位置も，同時に，第3節で述べた物理的実在の要素が存在するための十分条件を満たしている．

よって，量子力学が完全な理論であるのならば，粒子2の位置と運動量に対応する要素が同時に存在していることになる．これは，上記の命題 (I) が偽であるならば，命題 (II) が偽であるということである．しかるに，命題 (I) と命題 (II) は，どちらかが真でなければならないので，結局，命題 (I) は真でなければならない．すなわち，「量子力学は完全な理論ではない」ことを示すことができた．

ここまでの議論の中で，EPR 状態にある2つの粒子に対して，粒子1の位置あるいは運動量を測定すると，もう片方の粒子2に何らの影響も及ぼすことなく，その位置あるいは運動量の値を確実に予言できることから，粒子2の位置と運動量の両方が同時に物理的実在の要素を持つとした．しかし，実際には，粒子1の位置と運動量の両方を正確に定めることはできないのであるから，上で述べた物理的実在の要素が存在するための条件は適切ではなく，さらに条件を絞り，同時に物理的実在の要素を持つためには，実際に同時に予言できるとすべきではないかという疑問があり得る．この点に関して，EPR 論文では，物理的実在の要素が存在する条件が，粒子1に対して実際に行う測定に依存するのであれば，空間的に分離された事象である粒子1に対する測定により，粒子2の物理的実在の要素が変化することになり，実在の定義として合理的ではないと述べている．

以上が，EPR 論文の中で展開されている論理の骨子である．75年前の論文であるにも関わらず今日的な意味を保ち続けていることが納得できる，魅惑的な論理展開であると思われる．

ここで，完全な理論ではないことが何を意味するかを振り返っておくと，完全な理論であるための条件は，ある物理量の値を，系を全く乱すことなく確実に予言できるのであれば（物理的実在の要素が存在し），それに対応する要素が理論の中に含まれていることであった．ある物理量の測定値がどのような値になるかが決まっているのであれば，その値がいくつであるかを示す仕組みが理論の中に含まれていなければならないことは当然のように思える．そして，系を乱すことなく予言できるのであれば，その値は測定前から定まっているはずである．このような考え方は**実在論**と呼ぶことができるだろう．

実在論という言葉を今述べた意味で使うとすると，EPR 論文が示したことは，量子力学は，局所性を仮定すると，実在論は成り立たない理論であるいうことである．すなわち，**局所実在論**と量子力学は相容れないことを EPR 論文は示したといえる[3]．

そうすると，局所実在論と量子力学はどちらが正しいのかという質問に直面することになる．この質問は，EPR 論文により，このたちすべての人に突きつけられた質問であろう．EPR 論文の著者たち自身は，論文の最後で，物理的実在を記述する完全な理論があると信じると述べているが，このことは，以下で述べるように，**ベルの不等式**の実験的な検証により，否定されることになる．

■ 5. ボーアとボームとベル ■

この節では，頭文字がBで始まる3人の偉大な先人たちの“質問への回答”を紹介する．

量子力学をめぐってアインシュタインと論争を繰り広げたニールス・ボーアは，同じ1935年に同じ題名の論文を発表し[4]，EPR 論文で示された“物理的実在の基準”は，量子現象に適用する場合には本質的に曖昧さを含んでおり，相補性の観点

からすれば，量子力学による物理現象の記述は，完全性に対するすべての合理的な要求を満たしていると述べた．

ボーアの指摘した曖昧さとは，「系を全く乱すことなく」という表現の曖昧さである．位置を測定するか，運動量を測定するかということは，どのような測定装置を用いるかということであり，その測定装置は2粒子の系と本質的に一体をなしている．例えば，粒子の位置や速度を測定する装置として，ある架台上に座標の基準を定め，その基準を元に粒子の位置や速度を測定することを考える．粒子1の位置を測定すると，粒子1と架台の間には制御できない運動量の移行が生じる．この予測不能な運動量の移行は，座標の原点となる架台の速度にゆらぎを与えるので，粒子2の速度の測定に不可避な乱れを与えることになる．つまり，具体的な測定手段まで考えると，粒子1の位置の測定は，粒子2の運動量の測定に乱れを与えることになる．

ボーアは同論文中で次のようなことも述べている．量子論における物理的実在性の問題を考える際には，相対性理論から教訓を学ぶことができる．相対論において時空の概念に根本的な変更の必要があったように，相補性の概念によって特徴付けられる量子論においては，物理的実在に対する我々の態度の革命的な見直しを意味していると．

式(1)のEPR状態は，位置と運動量のように連続的な固有値をもつ物理量が相関を持つ状態であるが，デヴィッド・ボームは，原子のスピンのように離散的な固有値を持つ状態を使ってEPRの議論を書き直した[5]．

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_+(1)\psi_-(2) - \psi_-(1)\psi_+(2)]. \quad (11)$$

右辺の $\psi_\pm(1)$ は粒子1がスピン $\pm\hbar/2$ を持つ状態，$\psi_\pm(2)$ は粒子2がスピン $\pm\hbar/2$ を持つ状態を表している．この状態は，全スピンがゼロの状態であり，同じ軸方向のスピンの向きを測定すると，粒子1と2の測定結果は必ず逆になる．例えば，粒子1のスピンが z 軸方向に上向きであれば，粒子2の z 軸方向の向きは下向きでなければならない．

ところが，量子力学では，スピンはある軸方向の成分しか定まらない．z 軸方向のスピン成分が確定した状態に対しては，x 軸成分，y 軸成分とも未確定となり，例えば x 軸方向のスピンの向きを測定すると，上向きと下向きの結果をランダムに同じ確率で得ることになる．これは，粒子の位置と運動量が同時に定まることがないことと同じ状況であり，スピンの異なる軸方向の成分に対して（例えば，x 軸成分と z 軸成分），第4節の議論をよりシンプルに行うことができる．

ジョン・スチュワート・ベルは，局所実在論と量子力学のどちらが正しいのかを判別できることを示した[6]．この成果は，科学における最も深遠な発見と呼ばれることがあり，高く評価されている．

EPR論文は，量子力学が完全な理論ではないことを示したので，付加的な変数（**隠れた変数**）を付け加えることで，局所性と実在性を満たす理論が構築できるのではないかと考えられ，隠れた変数理論を構築する試みが行われた．ベルの不等式は，局所性を満たす隠れた変数理論が一般に満たす不等式であり，量子力学はこの不等式を破る．よって，ベルの不等式を実験的に検証し，もしも不等式が破れるのであれば，局所的な隠れた変数理論が成り立ち得ないことを実験的に示すことができる．逆に，不等式が破れないのであれば，不等式の破れを予言する量子力学は正しくないことになる．

■ 6. 実験による検証 ■

ベルの不等式の実験的な検証の中で，最も有名なのは，アラン・アスペらによる実験であろう[7]．この実験で用いられたEPR状態は，偏光が相関した2光子のペアである．2光子のペアは，カルシウム原子のカスケード放射により発生したもので，角運動量の保存則により，第一段階で発生する光子と第2段階で発生する光子は，逆向きの角運動量を持つ．そこで，1番目の光子の偏光の測定結果を知っていれば，同じ軸方向で2番目の光子

の偏光を測定したときの結果を予言することができる．これは，前節で述べた原子のスピンのEPR状態と同じであり，ベルの不等式の検証を行うことができる．

1982年に出版された論文では[7]，**遅延選択**の条件を満たした上で，ベルの不等式が破れることが報告された．不等式の破れの大きさは，実験の不確かさの5倍であり，不等式の破れはほぼ確実といえるだろう．遅延選択は，光源から測定装置まで光が伝播するのに要する時間よりも短い時間でどちらの方向の偏光を測定するか切り換えるもので，それぞれの光子の偏光の測定が空間的に分離されており，片方の測定の影響が他方に及ばないことを保証するものである．この実験結果により，局所的な隠れた変数理論はほぼ確実に否定されたといえる．

ただし，より理想的な実験を行うとすると，主に2つ改善すべき点があり，一つは偏光の切り替えをランダムに行うことである．1982年の実験は，2つの方向の偏光測定を交互に繰り返したものなので，どちらの方向で測定をするかという情報が光子の発生時に伝わり得る．もう一つの改善すべき点は，光子の検出効率であり，検出効率が低いと，相関の高いイベントのみが何らかのメカニズムで選ばれた可能性を否定できない．あらゆる局所的な隠れた変数理論を否定するためには，83%以上の検出効率が必要とされている[3,8]．

式 (1) のオリジナルのEPR状態に対応する実験も行われており，量子力学が“完全な理論”ではないことを示す結果が得られている[3,9]．

■ 7. おわりに ■

現在，量子力学の原理を直接利用することで，従来よりも優れた情報処理を実現するための研究が世界中で活発に行われている．これは，量子情報技術と呼ばれている研究分野であり，現在あるコンピュータでは宇宙の寿命よりも長い時間を要する問題を解いてしまう量子コンピュータや，盗聴者が物理法則に反しないことであれば何でもできるとしても通信の秘密を守ることができる量子暗号などが研究されている．

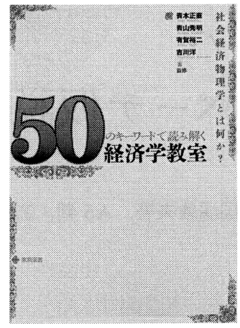
では，なぜ量子力学の原理を利用すると優れた性能が得られるのかを突き詰めて考えようとすると，量子力学がどのような点で古典的な理論とは異なるのかということを考えざるを得ない．

EPR論文は，エンタングルした状態を考えると，量子力学の世界が，局所実在論，すなわち，古典的な物の見方とは乖離していることを明確に示したものである．この乖離は，哲学的な問題としてもちろん大変重要なのであるが，日常的にエンタングルした状態を生成できるようになった今日では，その乖離をどのように利用できるのかという技術の問題ともなっているのである．

参考文献

1) A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen, “Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?”, *Phys. Rev.* **47**, 777–780 (1935); http://prola.aps.org/abstract/PR/v47/i10/p777_1
2) 清水明，「EPRパラドックスからベルの不等式へ」，日本物理学会編『アインシュタインと21世紀の物理学』（日本評論社 2005年）第7章．
3) M.D. Reid, P.D. Drummond, W.P. Bowen, E.G. Cavalcanti, U.L. Andersen and G. Leuchs, “Colloquium: The Einstein-Podolsky-Rosen paradox: From concepts to applications”, *Rev. Mod. Phys.* **81**, 1727–1751 (2007).
4) N. Bohr, “Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?”, *Phys. Rev.* **48**, 696–702 (1935).
5) D. Bohm, *Quantum Theory* (Prentice-Hall, Inc., New York, 1951), Chap. XXII.
6) J.S. Bell, “On the Einstein Podolsky Rosen paradox”, *Physics* **1**, 195–200 (1964).
7) A. Aspect, J. Dalibard, and G. Roger, “Experimental Test of Bell's Inequalities Using Time-Varying Analyzers”, *Phys. Rev. Lett.* **49**, 1804–1807 (1982).
8) A. Garg and N.D. Mermin, “Detector inefficiencies in the Einstein-Podolsky-Rosen experiment”, *Phys. Rev. D*, **35**, 3831–3835 (1987).
9) Z.Y. Ou, S.F. Pereira, H.J. Kimble, and K.C. Peng, “Realization of the Einstein-Podolsky-Rosen paradox for continuous variables”, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 3663–3666 (1992).

（ひらの・たくや，学習院大学理学部）



50のキーワードで読み解く経済学教室

社会経済物理学とは何か？

青木正直・青山秀明・有賀裕二・吉川洋監修，A5 判，472 頁，本体 3200 円，東京図書

「社会物理学」,「経済物理学」という学問を耳にしたことがあるだろうか．本誌でも経済物理学の特集（2002 年 10 月号『特集／エコノフィジックス最前線』）が組まれたこともあり，これら新興分野に関心を持つ読者も多いことと思う．端的に言えば，社会経済物理学は，自然科学的な視点や手法（特に統計物理的な手法）を用いて，経済現象をはじめとした社会現象の理解を目指す研究分野である．本書は，この目覚ましい発展をみせる学際的領域に焦点を合わせ，社会現象の解明に挑んだ研究，挑むための手法をまとめた解説書である．

本書の構成は，序章としての第 1 部と，50 のトピックスで語られるメインパートの第 2 部からなる．まず第 1 部では，監修者でもある二人の著名な経済学者による，正統派経済学への批判から始まる．正統派経済学では，マクロ経済の分析にあたり，「代表的な消費者の効用最大化」というミクロ経済理論の概念を基礎としてきた．つまり，個人の行動を分析し，それを相似拡大すればマクロ経済が理解できるとしてきたが，それは誤りだというのが第 1 部の重要な主張である．正統派経済学は，「行き過ぎたミクロ的基礎づけ」に対する批判に，耳を貸そうとはしなかったという．さらに著者は，物理学，化学，生物学などの自然科学の諸分野において，マクロな系の振舞いがミクロな構成素子の振舞いと同じ枠組みで議論されないことを指摘し，多粒子の集合としてマクロな系を取り扱う統計物理学の手法が，社会・経済現象を理解する上で有用であることを語っている．

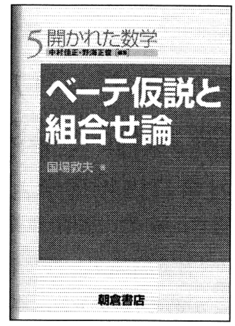
第 2 部では，30 名もの研究者によって，社会・経済現象を研究するのに必要な様々な手法が基礎からわかりやすく解説され，社会経済物理学の成果についてごく最近のものまでが紹介されている．その目次を眺めれば，取り扱われているトピックスの多様さに驚くことだろう．為替，株式市場，景気変動，労働生産性，連鎖倒産などの経済・金融関係のみならず，電力システム，交通渋滞，都市の人口分布や言語の進化のような話題まで網羅されている．手法についても，ゲーム理論，進化ゲーム，確率過程，複雑ネットワーク，ランダム行列理論など非常に充実している．各トピックスでは，詳細な議論の前に内容をわかりやすくまとめた解説が付されており，それは初学者の理解の助けになるだろう．また，それぞれのトピックスはほぼ独立しているため，目次を眺め，彩り豊かなキーワードの中から魅かれるままに読んでいくこともできる．

できるだけ多くのトピックスを紹介したいところだが，ここでは象徴的なものを取り上げるに留めておく．「33. マクロ経済学の再構築」,「34. 経済学における統計物理学の活躍」などは，経済学と物理学のシナジーがうまく働いている好例である．そこで紹介される研究では，完全な合理性を仮定するマクロ経済学において労働生産性が分布を持たない問題を指摘し，統計物理学の概念を導入することで，実際に観測されるベキ分布の出現メカニズムを明らかにしている．経済学者，物理学者それぞれの視点から解説され，経済学と物理学のコラボレーションによる成果が鮮やかに展開されている．

本書は，社会経済物理学は従来の経済学と一体何が違うのか，という疑問にも答えてくれる．その違いは「実証性」にあるという．自然科学における研究は，仮説に対して実験・観測によって厳しい検証が繰り返される実証研究であったが，経済学がいつもそうであるとは限らなかった．IT 技術の発達によって高頻度・大規模なデータの入手が可能になった今日，経済学，社会学はようやく検証のプロセスを辿っている．本書のトピックスでも多くの実証研究が紹介されており，経済学で「法則」と呼ばれる仮説がいくつも突き崩されるのを見ることができる．そして，自然科学で培われた実証研究のノウハウを利用することで得られた，経済学に対する新しい知見に驚かされることだろう．

本書が社会経済物理学の今を知るよいイントロダクションになるのは間違いない．それだけでなく，学際的研究を進める，もしくは志すすべての研究者，学生に数多くのヒントを与えてくれるだろう．経済学と物理学という学問の分類に囚われず，さらに新しい研究アプローチが生み出されることを期待して，幅広い分野の方々に本書をお勧めしたい．

藤 江　遼（FIRST 合原最先端数理モデルプロジェクト）



ベーテ仮説と組合せ論

国場敦夫著，A5 判，224 頁，本体 3600 円，朝倉書店

ベーテ仮説というのは，ベーテがある量子力学の問題を解くときに用いた，行列の対角化の方法を指す言葉である．著者によると，この本は様々に進化したベーテ仮説の中でも“最も風変わりなバージョン”である組合せベーテ仮説についての解説である．こう言われるとごく特殊な話題を扱っているように聞こえてしまうのだがそうではない．

ベーテの方法は，固有ベクトルとしてパラメータを含むある形を仮定して，そのパラメータがベーテ方程式というある連立代数方程式をみたすとき実際に固有ベクトルになるという議論である．当然こうして得られた固有ベクトルですべて尽きるかという完全性が問題になる．彼はその論文の多くのページを費やして，まさしくこの点を議論しているのである．難しいのはベーテ方程式の解の個数の勘定で，ベーテは解の形を設定し，それを数え上げると必要なだけあるという“組合せ的完全性”を証明している．ベーテの仮定した形では解を尽くさない場合があるなど，実際の固有ベクトルの完全性の証明にはなっていないが，数え上げの部分に限ると純粋に数学的な話で結果は正しい．そして，ここだけに限っても何らかの真理が隠れているような感じを受けるのである．つまり組合せ的側面はベーテの論文の最も重要な部分であるとも考えられるのだ．本書で解説されるのはその部分に関する驚くべき発展の物語である．

本書では可解格子模型と箱玉系という 2 つの話題が取り上げられる．前者は相転移現象などを調べるための統計力学的模型でベーテ仮説はこちらに関係する．後者は簡単な規則で複雑な現象を記述できるとして様々な応用があるセルオートマトンの一種で，ソリトン方程式を理解するために考案された模型である．

格子模型の一点関数というのは，磁石の磁化率のようなものである．バクスターの卓抜なアイディアである角転送行列の方法を用いると，それはパスの重みの母関数として記述される．パスというのは適当な折れ線のことで，それに適当な重みをつけてその個数を足し上げるのである．著者らは，1980 年代後半に一点関数が無限次元リー環の指標に一致することを多くの例で系統的に示したのであるが，それは柏原による量子群の結晶基底（クリスタル）の理論として結実した．本書の 2 章，3 章で解説されるのはその辺の話である．

過去の研究を統合して新しい理論が作られるとき，それまでの研究の内容の中で新理論から抜け落ちる部分が出てくるものである．アンドリュース・バクスター・フォレスターによる 1984 年の可解格子模型に関する有名な論文には，ロジャース・ラマヌジャン恒等式と呼ばれる無限和を因数分解する一連の公式が出てくる．実はこれがフェルミ公式と呼ばれるものの例で，無限和の部分に負号が出てこないのが特徴である．状態空間のエネルギー分布を，フェルミオンなどの粒子によりラベルされた基底で数え上げると，このような式が得られる．結晶基底の理論にはあからさまにはフェルミ公式を与えるような構造が見えていない．これに関連して，ベーテ仮説の組合せ的側面の研究から生まれた rigged configuration の理論とクリスタルとの関係が研究されるようになった．4 章，5 章がその解説である．

箱玉系は一列に並んだ箱の中をいくつかの玉がある規則に従って動く模型である．振幅が大きいほど早く進むなどのソリトンの特徴的な性質が手に取るように見え，手軽に実験できるなど親しみやすい性質を持つが，さて何が本質でどこまで一般化できるかなどは明らかではない．実は箱玉系はクリスタルによる解釈を持ち，それを用いて一般化の問題が，初期値問題と共に鮮やかに解決される．これが 6，7，8 章の内容である．

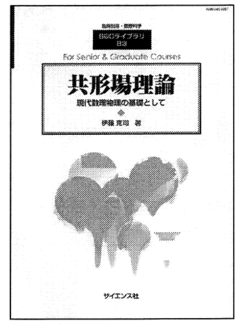
組合せ的にはかなりややこしい内容で，読むのは楽ではない．そのかわり第 1 章にかなり詳しい要約がありここだけ読んでも内容がかなりよくわかる仕組みになっており有り難い．ベーテ仮説に関連した研究は現在また急速な発展の時期を迎えている．この時期に，多岐にわたるこれまでの研究が本の形にまとめられた意義は大きい．著者の労を多としたい．

中屋敷 厚（津田塾大学学芸学部）

共形場理論

現代数理物理の基礎として

伊藤克司著，B5 判，160 頁，本体 2238 円，サイエンス社



3 人のロシアの物理学者たち A.A. Belavin, A.M. Polyakov, A.B. Zamolodchikov によって書かれた論文 “Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory” が学術雑誌 *Nuclear Physics B*$\mathbf{241}$ (1984) 333–380 に掲載されてから今年で 28 年が経過した．

彼らはそこで「2 次元の共形場の理論」の公理を導入し，素粒子物理学の弦理論や統計物理学の 2 次相転移現象に関する諸問題がその枠組みで扱われることを示し，共形場の理論の基礎的概念を確立したのである．そのとき「BPZ の衝撃」が世界中を駆け巡り，以来現在に至るまで物理学と数学双方に多大な影響を与え続けている．

伊藤克司氏の『共形場理論・現代数理物理の基礎として・SGC ライブラリ 83』は，その「まえがき」に示されているように，BPZ を読むための手引き書となるように丁寧にデザインされた優れた教科書である．「BPZ の論文は共形場理論の “古典” であり，簡潔ながら深い内容をもつ」と伊藤氏も観ずるように，彼ら 3 人の原論文は格調が高い．自然，行間の広いところが多く，なじみのない初学者は取り残されてしまうことが少なからずあるかと思う．共形場の理論の原典である BPZ を綿密に読みたいと思う人たちにとっては，伊藤氏による解説の出版はありがたい．また，トーラス上のミニマル模型と Boundary CFT につての簡潔で明快な解説まで読み進めば，基本的な考え方を一通り学び，BPZ 直後の進展を概観することとなる．

ロシア人学者たちの問題意識の深さ，研究の背景や関連の共有，物理学と数学の強い結びつき，技術的な事柄に対する驚くべき知識や訓練などは，どれをとっても桁外れに見える．そもそも，食べること，住むこと，友と会うこと，先人を尊敬すること，人を愛することなど，生きることそのものを徹底して大切にする彼らだから，そういう深い社会を造り上げることができたのかもしれない．理論物理学の研究室ならば，大抵どこでも共形場の理論の教科書を読むセミナーがある．できれば，原典の BPZ を学んでほしいと私は思う．

この教科書を読むにあたって要求されている予備知識は，（量子）場の理論の入門的事項と，「ある程度」の数学の知識である．理論物理学科の修士の学生ならば通読することは難しくないだろう．たとえ数学の予備知識が少なくとも，この本を読み進めることで数学自身の面白さがどこにあるのかを体感できると思う．ある程度と言っても，群論，リー環論，表現論，確定特異点型の常微分方程式，楕円テータ関数とモジュラー変換など，共形場の理論を扱うための数学は多彩である．伊藤氏の教科書を読んだ後，共形場の理論の新しいモデルを構成したり，任意の n 点の相関関数全体のなす空間とそれらが満たす偏微分方程式系の構造などを研究すれば，物理学と現代数学の進展をもたらすであろう．また，共形場の理論に興味を持つ純粋数学側の読者たちにとって本書は，（量子）場への（無限小）座標変換の作用，相関関数に対する Ward 恒等式，共形場の理論の公理などを理解するための良い入門書である．

以前，ランダウ研究所を訪ねたとき，BPZ が共形場の理論の公式を初めて書いたという「黒板」を見せてもらった．それは，数十センチ四方の小さな小さな黒板だった．彼らは，ランダウ研究所を取り囲む広大な森の中を毎日散歩しながら議論を積み重ねてきたのだろう．ソビエト時代の彼らの日々の暮らしはどのようなものであったろうか．彼らは白墨とその黒板を手に携え，森を歩き，素晴らしく楽しい一日——眼前に揺るぎなく共形場の理論が姿を現したとき——を迎えたに違いない．

共形場の理論を手にした我々がこれから進むべき道はどこへつながっているのだろうと考えると夢は尽きない．

白石 潤一（東京大学大学院数理科学研究科）

「数理科学」は語る

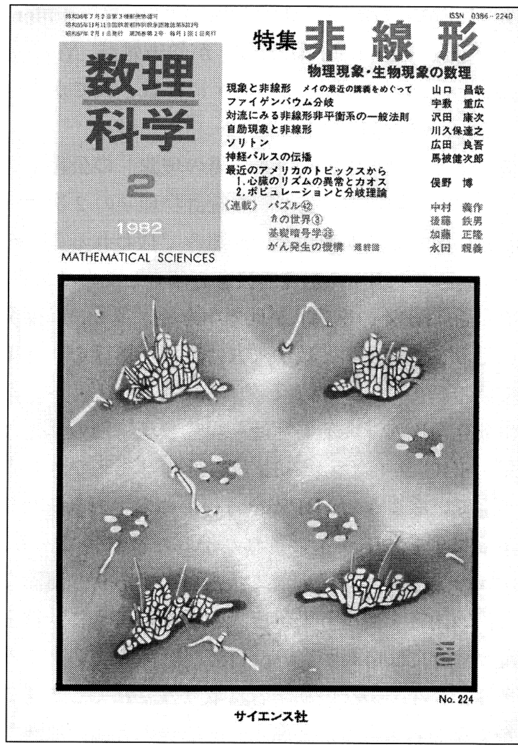
30年前から現代へのメッセージ

宇敷　重広

1982年2月号

19世紀末頃のポアンカレの論文には，微分方程式の解でありながら複雑な挙動を示すものが存在することが記されている．スメールを中心として発展した可微分力学系の研究で，馬蹄力学系と呼ばれるメカニズムがあって，複雑な挙動の源泉になっているらしい，とされたのは，1960年代であった．当時は，電気回路など，実際の物理現象を観察して，理論的考察を加えていた．1970年代でも，電子計算機を使うのはなかなか厄介で，アナログコンピュータを使いこなす研究者が優位に立っていた．

1970年代末頃から，カオスの理論が注目されるようになった．その頃，プログラム電卓やパソコンなど，貧弱な研究環境でも工夫次第で計算できる手段が出現した．2次関数の繰り返しでできる力学系が，すでに高度に複雑な挙動を呈するというカオス現象は，研究テーマとして，魅力的であった．計算機を活用することで，新しい研究分野が開けたのであった．この記事で取り上げた理論は，物理学においては画期的なものであった．相転移などの臨界現象や乱流には，様々な形で自己相似のメカニズムが関わっており，繰り込みと呼ばれる操作を通じて，解析される．



ファイゲンバウムは，解析的な力学系でこの現象を解析することによって，相空間における軌道や分岐パラメータの集積の自己相似のスケール比などを，驚くべき高精度で計算し，それが，ユニバーサルなもの，すなわち，こうした現象においては，数学現象であれ，物理現象であれ，同じ構造と定数（ファイゲンバウム定数）が支配している，と結論した．

その後，ファイゲンバウムの繰り込みの極限の力学系の正体を巡って様々な研究が行われた．ランフォードが，ファイゲンバウムの繰り込みの下で不変な関数が存在することを，コンピュータによる精度保証付きの計算で「証明」した．サリバンは，そのような「証明」で満足するべきでなく，概念的に理解可能な証明が必要だと主張した．繰り込みという操作は力学系の空間内のいわばメタ力学系をなすものであり，不変関数はその不動点であり，定数はそこでの固有値である，という．

繰り込みの考え方は，数学にも深く影響し，リュービッチは複素力学系としてのファイゲンバウム分岐の研究に活用し，ヨコツは，ジーゲル円盤の問題に利用した．カオス力学系や複素力学系の研究では，様々な形で展開する．マンデルブロー集合の「自己相似性」にもこうした考え方が利用できたし，放物型不動点の研究では，繰り込みの操作が，タイヒミューラー空間上の力学系として定式化可能であることが宍倉と稲生の研究で示され，現在でも研究の最前線である．

（うしき・しげひろ，京都大学大学院人間・環境学研究科）

情報幾何の新展開
脳と情報の数理科学

第12回

統計的推論の高次漸近理論 (1)
指数型分布族と空間の埋め込み

甘利 俊一

今回から 3 回にわたって，統計的推論の高次漸近理論を紹介する．これが情報幾何発祥の源となった．一般に空間は曲がっている．統計モデルの空間もそうであるが，これは素直な真っすぐの空間に埋め込まれた曲部分空間と見なせる．素直な空間とは，指数型分布族のことである．そこで，今回は空間の埋め込みの幾何学から始め，指数型分布族を解説しよう．

12.1 部分空間と埋込曲率

高次元の空間に部分空間として埋め込まれた空間を考えよう．一般に m 次元のリーマン空間は，高次元（n 次元，$n > m$）のユークリッド空間にその曲がった部分空間として等長的に埋め込めることが知られている．球面は 3 次元ユークリッド空間に埋め込まれた 2 次元の曲面である．双対接続の空間も高次元の双対平坦空間に埋め込める．これについては Hong Van Le の研究がある[1)]．

我々の扱う統計的モデルはパラメータ $\boldsymbol{u} = \left(u^1, \cdots, u^m\right)$ で指定される確率分布の族

$$M = \{p(x, \boldsymbol{u})\} \tag{12.1}$$

である．これは幾何学的に複雑な構造のモデルかもしれないが，$\boldsymbol{\xi} = \left(\xi^1, \cdots, \xi^n\right)$ をパラメータとする次元の高い幾何学的に簡単な確率分布の族

$$S = \{p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})\}, \quad n > m \tag{12.2}$$

があって，その中に埋め込まれているとしよう（図 12.1）．S は次元の高い指数型分布族とする．

観測データをもとに推論を行うのに，まず S の中で考える．観測データが指

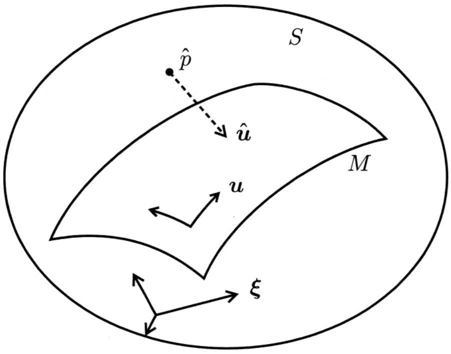


図 12.1　$\boldsymbol{u}$ を座標系とする空間 M の $\boldsymbol{\xi}$ を座標系とする空間 S への埋め込み．

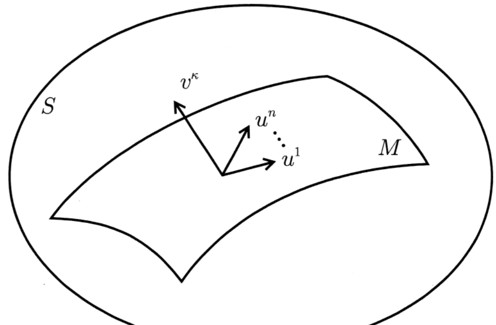


図 12.2　M の座標系 $\boldsymbol{u} = (u^a)$ とそこからはみ出す座標系 $\boldsymbol{v} = (v^\kappa)$ を考える．

定する確率分布 $\hat{p} \in S$ をまず S の中で考える．これは簡単であるとする（後述）．その次にこれを部分空間 M に写像することになる．このため，M の内部に閉じこもって幾何学を論ずるのではなくて，S の中で M がどのような場所を占めているのか，またどのように曲がっているのかを論ずる必要がある．ここで背景空間 S に埋め込まれた M の幾何学構造を調べよう．

n 次元の双対接続をもつ多様体 $\{S, g, T\}$ の中に，m 次元 $(m < n)$ の多様体 M が埋め込まれていたとしよう．S の（局所）座標系を $\boldsymbol{\xi}$ とし，添字 i を使って ξ^i のように書く．また，M の（局所）座標系を $\boldsymbol{u}$ とし，添字 a を使って u^a のように書く．M は S の中では次元が落ちている．そこで，M からはみ出す $n - m$ 次元方向（トランスバース方向，横断する方向という）を考え，その方向に座標系 $\boldsymbol{v}$ を入れる（図 12.2）．この座標系には添字 κ を使い v^κ としよう．すると，M の近傍では，S の点は座標の組 $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ を用いて表すことができる．これは S の新しい座標系

$$\boldsymbol{w} = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (u^a, v^\kappa) \tag{12.3}$$

をつくる．M 上の点は $\boldsymbol{v} = 0$ となるように $\boldsymbol{v}$ の原点を定める．添字 (a, κ) をまとめて α で表し，$\boldsymbol{w} = (w^\alpha)$ と書こう．ここで，添字 α は，u^a の部分 $(a = 1, \cdots, m)$ と v^κ の部分 $(\kappa = m+1, \cdots, n)$ を走る．

S で，座標系 $\boldsymbol{\xi}$ から座標系 $\boldsymbol{w}$ への座標変換を考えれば，その変換の行列は

$$B^i_\alpha = \frac{\partial \xi^i}{\partial w^\alpha} \tag{12.4}$$

である．S の構造 $\{g, T\}$ を部分空間 M に写したい．

g と T はそれぞれ対称な 2 次形式と 3 次形式を作る．すなわち，$\boldsymbol{X}$ を S の接ベクトルとして

$$g(\boldsymbol{X}) = g_{ij} X^i X^j, \quad T(\boldsymbol{X}) = T_{ijk} X^i X^j X^k. \tag{12.5}$$

このとき，$\boldsymbol{X}$ がたまたま M の接ベクトルであったとしよう．このとき，M の接空間の基底 $\{\boldsymbol{e}_a\}$ を用いて，$\boldsymbol{X} = X^i \boldsymbol{e}_i$ は

$$\boldsymbol{X} = X^a \boldsymbol{e}_a \tag{12.6}$$

のように書ける．

$$\boldsymbol{e}_\alpha = B^i_\alpha \boldsymbol{e}_i \tag{12.7}$$

であるから，

$$X^i = B^i_a X^a \tag{12.8}$$

が成立する．

M の幾何学構造を表す g と T を，S での g と T に合うように定義しよう．すなわち，$\boldsymbol{X}$ の 2 次および 3 次形式はどちらで計っても同じだとしよう．$\boldsymbol{X}$ が M の接ベクトルであるときは

$$\langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{X} \rangle = g_{ij} X^i X^j = g_{ab} X^a X^b, \tag{12.9}$$

また T の作る 3 次形式も

$$T_{abc} X^a X^b X^c = T_{ijk} X^i X^j X^k. \tag{12.10}$$

すると，(12.8) より

$$g_{ab} = B^i_a B^j_b g_{ij}, \quad T_{abc} = B^i_a B^j_b B^k_c T_{ijk}. \tag{12.11}$$

これにより，M に計量と双対接続が導入された．

M の内部の構造を見る限り，これで十分であるが，S と M との関係を見るにはこれだけでは済まない．埋め込んだときの曲がり方が問題である．まず，M の接空間を考えよう．これは座標軸 u_a に沿った接ベクトル $\boldsymbol{e}_a$ の全体で張られる．これは S の接空間の部分空間であるから，S の基底 $\boldsymbol{e}_i$ を用いれば，M の接ベクトル $\boldsymbol{e}_a$ は (12.7) のように書ける．同じように，横断方向の $\boldsymbol{v}$ に沿った基底 $\boldsymbol{e}_\kappa$ は

$$\boldsymbol{e}_\kappa = B^i_\kappa \boldsymbol{e}_i \tag{12.12}$$

である．ここで，横断方向の座標 $\boldsymbol{v}$ を M と直交するように取っておくと，

$$g_{a\kappa} = \langle \boldsymbol{e}_a, \boldsymbol{e}_\kappa \rangle = 0 \tag{12.13}$$

となり，便利である．M が S の中で曲がっているとは，M の $\boldsymbol{u}$ 点での接空間 $T_{\boldsymbol{u}}$ が場所 $\boldsymbol{u}$ が変わるにつれて S の中で方向を変えていくことである．点 $\boldsymbol{u}$ が M の中で $\boldsymbol{u}+d\boldsymbol{u}$ に変わるとし，接ベクトル $\boldsymbol{e}_a$ がどう変わるかを見る．ε を微小として $d\boldsymbol{u} = \varepsilon \boldsymbol{e}_b$ としよう．このとき，$\boldsymbol{e}_a(\boldsymbol{u})$ を $\boldsymbol{u}+d\boldsymbol{u}$ 点に平行移動した $\tilde{\boldsymbol{e}}_a$ と比べて，実際の $\boldsymbol{e}_a(\boldsymbol{u}+d\boldsymbol{u})$ がどう違うかを見ればよい．とくに M の垂直方向へのずれが問題である（図 12.3）．この変化は，S での共変微分 ∇ を使えば $\tilde{\boldsymbol{e}}_a = \boldsymbol{e}_a + \delta \boldsymbol{e}_a$ は

$$\delta \boldsymbol{e}_a = \varepsilon \nabla_{\boldsymbol{e}_b} \boldsymbol{e}_a = \varepsilon \Gamma^i_{ba} \boldsymbol{e}_i \tag{12.14}$$

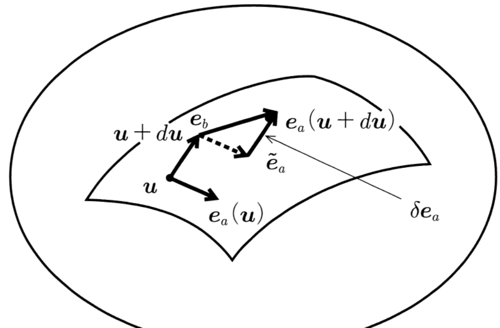


図 12.3　埋込曲率は基底 $\boldsymbol{e}_a$ の変化 $\delta\boldsymbol{e}_a$ の M に垂直方向の成分で計れる.

と書ける．$\delta\boldsymbol{e}_a$ は M の接方向のずれと，垂直方向へのずれに分けられる．接方向のずれは接空間自体の中の変化である．垂直方向のずれが接空間の方向の変化を表す．垂直方向のずれを基底 $\{\boldsymbol{e}_\kappa\}$ を用いて

$$\delta\boldsymbol{e}_a^\perp = H_{ab}{}^\kappa \boldsymbol{e}_k du^b \tag{12.15}$$

と書くことにしよう．その成分を求めるには $\boldsymbol{e}_\kappa$ を内積すればよく，

$$H_{ba\kappa} = \langle \nabla_{\boldsymbol{e}_b}\boldsymbol{e}_a, \boldsymbol{e}_\kappa \rangle \tag{12.16}$$

で表せる．これは，2 つの添字 a, b を M 方向に持ちこれらに関して対称で，さらにもう一つの添字 κ を垂直方向に持つテンソルである．これを M の S の中における埋込曲率（または Euler–Schouten の embedding curvature）という．

接続は 2 種類あったから，埋込曲率も 2 つ出る．すなわち

$$H^*_{ab\kappa} = \left\langle \nabla^*_{\boldsymbol{e}_a}\boldsymbol{e}_b, \boldsymbol{e}_\kappa \right\rangle. \tag{12.17}$$

埋込曲率はリーマン曲率とは違う．リーマン曲率は空間 M の内部の性質で，外との関係を表すものではない．だから，リーマン曲率が 0 だからといって，M は真っすぐに埋め込まれていることにはならない．ユークリッド空間に埋め込まれた円筒面（シリンダー）や堆を考えよう．円筒面上や堆面上では（大局的な関係を無視すれば）ユークリッド幾何が成立する．円筒に切れ目を入れれば平面に拡げることができ，この平面上でユークリッド幾何が成立する．世界一周しても方向は元に戻る．だから，リーマン曲率は 0 である．しかし埋め込んだ 3 次元空間から見ればこれは明らかに曲がっている．その曲がり方を示すのが埋込曲率である．

M の中の曲率を元の空間の曲率と埋込曲率とで表す公式が知られている．これはガウスの公式の一般化である．

$$R_{abcd} = B_a^i B_b^i B_c^k B_d^l R_{ijkl} + g^{\kappa\lambda}\left(H^*_{ad\kappa}H_{bc\lambda} - H_{ac\kappa}H^*_{bd\lambda}\right). \tag{12.18}$$

とくに S が平坦であれば $R_{ijkl}=0$ で，リーマン曲率は $H_{ab\kappa}$ と $H^*_{ab\kappa}$ だけで表せる．埋込曲率は，統計学で重要な役割を果たす．

12.2 確率分布族の空間とスコア関数

確率分布族 $M=\{p(x,\boldsymbol{\xi})\}$ を多様体と考える．確率変数 x は離散値でも連続値でもよく，多次元ベクトルや時系列でもよい．$p(x,\boldsymbol{\xi})$ は x に関してある測度 $\mu(x)$ の下での確率密度関数とする．これからは，積分 $d\mu(x)$ を単に dx と書くこともある．$\boldsymbol{\xi}$ は M の（局所）座標系をなす．点 $\boldsymbol{\xi}$ における接空間 $T_{\boldsymbol{\xi}}$ は，座標軸方向の接ベクトル

$$\boldsymbol{e}_i=\partial_i\left(=\frac{\partial}{\partial\xi^i}\right) \tag{12.19}$$

で張られる線形空間である．この基底 $\{\boldsymbol{e}_i\}$ を，座標系 $\boldsymbol{\xi}$ に伴う自然基底と呼ぶ．

確率密度関数 $p(x,\boldsymbol{\xi})$ の対数を

$$l(x,\boldsymbol{\xi})=\log p(x,\boldsymbol{\xi}) \tag{12.20}$$

と書く．x を固定してこれを $\boldsymbol{\xi}$ の関数と見たとき，対数尤度と呼ぶ．x が与えられたときに，これを確率密度関数 $p(x,\boldsymbol{\xi})$ から発生したデータと見るときの，$\boldsymbol{\xi}$ が決める分布のもっともらしさ（尤度）の対数である．微分した $\partial_i l(x,\boldsymbol{\xi})$ は，尤度が $\boldsymbol{\xi}$ と共にどう変わるか，その変化を表す．これはスコア関数と呼ばれるベクトル値関数である．

スコア関数 $\partial_i l(x,\boldsymbol{\xi})$ を x の関数と見ると，これは確率変数である．しかも ξ^i を変えたときの確率の変化の度合いを示す．ここで，接空間の基底ベクトル $\boldsymbol{e}_i$ と確率変数 $\partial_i l$ とを同一視してみよう．いや，基底ベクトル $\boldsymbol{e}_i$ を確率変数 $\partial_i l(x,\boldsymbol{\xi})$ で表現するといってもよい．n 個の確率変数 $\partial_i l$ の張る線形空間を $T_{\boldsymbol{\xi}}$ と同一視する．

このとき，接空間のベクトル $\boldsymbol{e}_i=\partial_i$ は，確率変数

$$\partial_i\approx\partial_i l(x,\boldsymbol{\xi}) \tag{12.21}$$

で表現される．スコア関数の期待値は

$$E\left[\partial_i l(x,\boldsymbol{\xi})\right]=\int p(x,\boldsymbol{\xi})\partial_i l(x,\boldsymbol{\xi})dx=\partial_i\int p(x,\boldsymbol{\xi})dx=0 \tag{12.22}$$

であるから，確率変数で表現したときの任意の接ベクトル $\boldsymbol{A}=A^i\boldsymbol{e}_i$ は

$$A(x)=A^i\partial_i l(x,\boldsymbol{\xi}) \tag{12.23}$$

という確率変数となり，その期待値は 0 である．

2 つの確率変数 $A(x)$ と $B(x)$ の内積は，積の期待値

$$\langle A(x),B(x)\rangle=E\left[A(x)B(x)\right] \tag{12.24}$$

で定義される．基底ベクトルの内積は

$$\langle\partial_i l,\partial_j l\rangle=E\left[\partial_i l(x,\boldsymbol{\xi})\partial_j l(x,\boldsymbol{\xi})\right]=g_{ij}(\boldsymbol{\xi}) \tag{12.25}$$

であるから，

$$\left\langle A^i \boldsymbol{e}_i, B^j \boldsymbol{e}_j \right\rangle = E\left[A^i B^j \partial_i l \partial_j l\right] = A^i B^j g_{ij} \tag{12.26}$$

で，どちらで計算しても同じになる．行列 g_{ij} は前に何度も出た Fisher 情報行列で，これが統計的推論において基本的な役割を演ずる．幾何学ではリーマン計量を与える．さらに，3 階の対称テンソルも

$$T_{ijk} = E\left[\partial_i l \partial_j l \partial_k l\right] \tag{12.27}$$

で定義できる．ここから，双対接続を持つリーマン構造 $\{M, g, T\}$ が導かれる．

これは不変性を満たす幾何学構造であり，KL ダイバージェンスから導かれるものと一致する．一般の不変なダイバージェンス，例えば f ダイバージェンスからは，Fisher 情報行列 g と，スカラー α を用いて αT を 3 階のテンソルとする α 双対幾何が導ける．不変性の要請から出る幾何学は，ロシアの数学者 Chentsov[2)]が考え，離散確率分布の族について，その一意性を証明した．Chentsov の証明はカテゴリーの理論を用いるので，わかりにくい．カナダの Campbell はわかりやすい別証明を与えた[3)]（不変な計量の一意性のみであるが，テンソル T の一意性についても同様にできる）．ただ，連続変数の場合の証明は，まだ完全なものはない．これには関数空間のトポロジーが関係し，そう簡単ではない．しかし，応用上はこのことを気にせずに話を進めて，通常は差支えがない．厳密性を気にすることは大切であるが，これは数学者に任せよう．

12.3 指数型分布族

指数型分布族は極めて素直な分布族である．離散確率変数 x の分布の全体 $S = \{p(x)\}$ は指数型分布族である．x が連続値の実数である場合，$F = \{p(x)\}$ を指数型分布族といい切ることは難しいが，もし x を離散に刻んで近似して良いなら，間違いなく指数型分布族である．

適当なベクトル確率変数 $\boldsymbol{x} = (x_i)$，測度 $\mu(\boldsymbol{x})$ を用いて，確率密度関数がベクトルパラメータ $\boldsymbol{\theta} = \left(\theta^i\right)$ により

$$p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}) = \exp\left\{\theta^i x_i - \psi(\boldsymbol{\theta})\right\} \tag{12.28}$$

のように書ける確率分布の集まりを指数型分布族という[*1)]．正規分布，多項分布，ガンマ分布，ベータ分布，その他多くの良く知られた分布族はこのクラスに入る．ここで，規格化定数を表す関数

$$\psi(\boldsymbol{\theta}) = \log \int \exp\left(\theta^i x_i\right) d\mu(\boldsymbol{x}) \tag{12.29}$$

---

*1）指数型分布族を

$$p(x, \boldsymbol{\theta}) = \exp\left\{\theta^i h_i(x) + h(x) - \psi(\boldsymbol{\theta})\right\}$$

のように書くことも多い．このとき，$x_i = h_i(x), d\mu(x = \exp\{h(x)\}\, dx$ とおけば，(12.28) の形になる．x はベクトルでも良い．

は凸関数で，キュムラント生成関数になっている（物理学でいう自由エネルギーに相当する）．この凸関数から，双対平坦な幾何学構造が導かれるが，これは不変な構造である．

指数型分布族にあって，$\boldsymbol{\theta}$ がアファイン座標系となる．これを自然パラメータ（座標系）と呼ぶ．Legendre 変換で得られる双対アファイン座標 $\boldsymbol{\eta}$ は

$$\eta_i = \partial_i \psi(\boldsymbol{\theta}) \tag{12.30}$$

であって，これは確率変数 $\boldsymbol{x}$ の期待値

$$\boldsymbol{\eta} = E[\boldsymbol{x}] \tag{12.31}$$

になっている．これを期待値パラメータ（座標系）と呼ぶ．スコア関数は

$$\partial_i l(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}) = x_i - \partial_i \psi(\boldsymbol{\theta}) \tag{12.32}$$

であり，ここから計量

$$g_{ij}(\boldsymbol{\theta}) = E\left[(x_i - \eta_i)(x_j - \eta_j)\right] = \partial_i \partial_j \psi(\boldsymbol{\theta}) \tag{12.33}$$

が得られる．これは $\boldsymbol{x}$ の分散行列である．T は

$$T_{ijk} = E\left[(x_i - \eta_i)(x_j - \eta_j)(x_k - \eta_k)\right] = \partial_i \partial_j \partial_k \psi(\boldsymbol{\theta}) \tag{12.34}$$

で，$\boldsymbol{x}$ の 3 次のモーメントである．

指数型分布族は確率分布の自然な族であり，確率変数 x が有限個の値を取る，離散分布からなる空間は指数型分布族であった．すなわち，$x = 0, 1, \cdots, n$ として，$x_i = \delta_i(x)$ とおけば

$$p(x, \boldsymbol{\theta}) = \exp\left\{\theta^i \delta_i(x) - \psi(\boldsymbol{\theta})\right\} \tag{12.35}$$

の形に書けた．このアナロジーでいえば，実軸上の確率密度関数 $p(x)$ 全体のなす空間 F も，指数型分布族とみなして良さそうである．しかしこれは無限次元の関数空間になるから，トポロジーの問題を避けて通れない．したがって，厳密な議論をするときには注意が必要である．しかし，それを無視して形式的にやってみよう．

ここで，実数のルベック測度と互に絶対連続な確率密度関数 $p(x)$ の全体からなる空間

$$F = \left\{ p(x) \,\middle|\, \int p(x)dx = 1, \quad p(x) > 0 \right\} \tag{12.36}$$

を考えよう．これは無限次元空間である．これを指数型分布族と見るために，$\boldsymbol{\theta} = \left(\theta^i\right)$ の代わりに $\theta(t)$ という関数を導入し，

$$p(x, \theta) = \exp\left\{ \int \theta(t)\delta(t - x)dt - \psi(\theta) \right\} \tag{12.37}$$

と書く．$\delta(t - x)$ はデルタ関数である．ここで，確率密度関数 $p(x)$ の F の中

での座標は

$$\theta(t) = \log p(t) \tag{12.38}$$

であるとし，規格化のための $\psi(\theta)$ は $\theta(t)$ の汎関数で

$$\psi(\theta) = \log\left\{\int \exp\{\theta(t)\}\,dt\right\} \tag{12.39}$$

とする．$\theta(t)$ がアファイン座標系である．これは指数型に書けている．ただし，統計学ではこのようなものを指数型分布族とはいわないことに注意．

$\psi(\theta)$ を $\theta(t)$ で微分（Frechét 微分）すれば，双対アファイン座標は

$$\eta(t) = p(t) \tag{12.40}$$

である．このとき，$\psi(\theta)$ から得られる双対ポテンシャルはエントロピーのマイナスで

$$\varphi(\eta) = \int \eta(t)\log\eta(t)dt - 1 \tag{12.41}$$

である．

S の点 $p(x)$ における接空間 T_p を考えよう．これは $p(x)$ の微小な変化を $p(x)+\delta p(x)$ として，$\delta p(x)$ の張る線形空間である．η 座標で考えるなら，ε を微小として

$$p(x) + \delta p(x) = p(x) + \varepsilon a(x) \tag{12.42}$$

とおく．すると上式の右辺の積分は 1 であるから

$$\int a(x)dx = 0, \tag{12.43}$$

したがって T_p は (12.43) を満たす関数 $a(x)$ で張られる線形空間である．

一方，θ 座標系を採用すれば

$$\delta\log p(x) = \frac{\delta p(x)}{p(x)} = \varepsilon b(x) \tag{12.44}$$

とおいて，$b(x)$ は

$$E[b(x)] = 0 \tag{12.45}$$

である．したがって T_p は (12.45) を満たす関数で張られる．

計量 g_{ij} は

$$dx^2 = g_{ij}d\theta^i d\theta^j \tag{12.46}$$

のように，2 次形式を作る．関数空間の場合，これは

$$ds^2 = \int g(t-r)d\theta(t)d\theta(r) \tag{12.47}$$

のような形式になる．計量は (12.39) 式の ψ から簡単に計算できて

$$g(t-r) = p(t)\delta(t-r) \tag{12.48}$$

となる．その逆関数は η 座標で表した計量で

$$g^{-1}(t-r) = \frac{\delta(t-r)}{p(t)}. \tag{12.49}$$

3 次形式も同様で，θ 座標系では

$$T(t,r,q) = p(t)^2\delta(t-r)\delta(t-q), \tag{12.50}$$

η 座標系では

$$T^{-1}(t,r,q) = \frac{1}{p(t)^2}\delta(t-r)\delta(t-q) \tag{12.51}$$

で良い．

こうして，形式的にはすべてがうまくいくが，数学的には深刻な問題が残る*2)．

12.4 指数型分布族における統計的推論

(12.28) 式の指数型分布族 $S = \{p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta})\}$ は相対平坦で，線形モデルと見られる良い性質を持つ．そこで，このモデルにおける統計的推論から話を始めよう．分布の一つから，N 個のデータ $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_N$ が毎回独立に観測されたとしよう．このとき，データ

$$D = \{\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_N\} \tag{12.52}$$

の確率分布は

$$p(D, \boldsymbol{\theta}) = \prod p(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{\theta}) = \exp\left\{\boldsymbol{\theta} \cdot \sum \boldsymbol{x}_i - N\psi(\boldsymbol{\theta})\right\} \tag{12.53}$$

のように書ける．ここで，算術平均

$$\bar{\boldsymbol{x}} = \frac{1}{N}\sum \boldsymbol{x}_i \tag{12.54}$$

を導入すれば，上式は

$$p(D, \boldsymbol{\theta}) = \exp\{N\boldsymbol{\theta} \cdot \bar{\boldsymbol{x}} - N\psi(\boldsymbol{\theta})\} \tag{12.55}$$

のように書けて，$\bar{\boldsymbol{x}}$ を確率変数とする同じ形式の指数型分布族になる．ただし，指数の中がすべて N 倍されている．幾何学の言葉でいえば，計量や T などがすべて N 倍されただけで形は元と同じである．つまり，空間のスケールが単に N 倍に膨張したとみて良い．対数尤度を N で割れば，

$$\frac{1}{N}\log p(D, \boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{\theta} \cdot \bar{\boldsymbol{x}} - \psi(\boldsymbol{\theta}) \tag{12.56}$$

---

*2)　(12.43) で定義する線形空間と (12.45) で定義する線形空間が，内積の定義されたヒルベルト空間として同じになるという保証はない．F を Hilbert 空間として定式化することは難しく，Orlicz 空間と考える．これについては，例えば Pistone らの論文[4] および Graselli の論文[5] を見よ．

となる．

データ D は N 個の n 次元ベクトルからなるが，これを平均した $\bar{\boldsymbol{x}}$ は 1 個の n 次元ベクトルである．データ D を $\bar{\boldsymbol{x}}$ に縮約しても，確率分布は $\bar{\boldsymbol{x}}$ の関数として書ける．だから尤度をもとに推論を行う限り，$\bar{\boldsymbol{x}}$ は D と同等である．これは $\bar{\boldsymbol{x}}$ が十分統計量であることを示し，D の代わりに $\bar{\boldsymbol{x}}$ を用いて推論を行っても情報の損失はない．$\bar{\boldsymbol{x}}$ の持つ Fisher 情報量は全データ D の Fisher 情報量に等しい．

データ D から尤度 $p(D,\boldsymbol{\theta})$ を最大にする $\boldsymbol{\theta}$ を求めたものを最尤推定量という．最尤推定量 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ は $l(D,\boldsymbol{\theta})$ を微分したものを 0 とおけば

$$\partial_i \psi\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) = \bar{\boldsymbol{x}} \tag{12.57}$$

を満たすから，双対アファイン座標 $\boldsymbol{\eta}$ を用いれば，単純に $\hat{\boldsymbol{\eta}} = \bar{\boldsymbol{x}}$ と書ける．

定理 12.1 双対アファイン座標を用いたときの最尤推定量 $\hat{\boldsymbol{\eta}}$ は，不偏で Cramer–Rao 限界を等号で満たす最良の推定量である．

証明 最尤推定量 $\hat{\boldsymbol{\eta}}$ は，データ $\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_N$ の算術平均である．分布の真のパラメータは双対座標では $\boldsymbol{\eta} = E\left[\boldsymbol{x}\right]$ である．したがって，大数の法則によって，推定量 $\hat{\boldsymbol{\eta}} = \bar{\boldsymbol{x}}$ は $\boldsymbol{\eta}$ に収束する．推定誤差は N と共に 0 に収束するから，ここで誤差を拡大して，誤差ベクトルの $\sqrt{N}$ 倍を

$$\hat{\boldsymbol{e}} = \sqrt{N}\left(\hat{\boldsymbol{\eta}} - \boldsymbol{\eta}\right) = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N}\left(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{\eta}\right) \tag{12.58}$$

と置こう．すると中心極限定理によって，$\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\eta}$ はガウス分布に漸近し，その平均は 0，分散は

$$\frac{1}{N}g_{ij} = \frac{1}{N}E\left[\left(x_i - \eta_i\right)\left(x_j - \eta_j\right)\right] \tag{12.59}$$

である．双対アファイン座標系 $\boldsymbol{\eta}$ で考えているから，Fisher 情報行列は g^{ij} である．これより，推定量 $\hat{\boldsymbol{\eta}}$ はバイアスがなくて不偏，さらにその平均二乗誤差は

$$E\left[\left(\hat{\eta}_i - \eta_i\right)\left(\hat{\eta}_j - \eta_j\right)\right] = \frac{1}{N}g_{ij} \tag{12.60}$$

となり，Cramer–Rao の不等式を等号で満たす（(g_{ij}) は $\left(g^{ij}\right)$ の逆行列である）．したがって，平均二乗誤差を最小にする意味で，これが最良の推定量であることが分かる．

指数型分布族において，アファイン座標 $\boldsymbol{\theta}$ は自然パラメータ，双対アファイン座標 $\boldsymbol{\eta}$ は期待値パラメータと呼ばれている．最尤推定は，どの座標系で行っても同じものを与える．すなわち，$\boldsymbol{\theta}$ 座標での最尤推定を求めるには

$$\hat{\eta}_i = \partial_i \psi\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) \tag{12.61}$$

を解けばよい．しかし，$\boldsymbol{\theta}$ 座標系での推定誤差を

$$\hat{e}_\theta = \sqrt{N}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}\right) \tag{12.62}$$

とすれば，これは N が大きくなると 0 に収束するし，誤差の分散は Fisher 情報行列 (g_{ij}) の逆行列 (g^{ij}) に漸近する．しかし，$\hat{\boldsymbol{\theta}}$ は厳密に不偏ではない（漸近的には不偏）．さらに Cramer–Rao の不等式も，N を大きくすれば漸近的に等式で達成するが，厳密に等号で成立するわけではない[*3]．

終わりの一言

指数型分布族における推論はやさしすぎてあっけない．だから，一般の分布族を扱うのに，これを指数型分布族の中に埋め込まれた分布族，曲指数分布族と見ると，推論は幾何学の枠に納まる．もっとも，指数型分布族には埋め込めない分布族もある．また，連続分布の全体は無限次元空間であり，指数型分布族には納まらないなどの困難はある．しかしやさしい話から始め，困難は応用の状況に応じてその都度克服すればよい．

参考文献

1) H.V. Le, Statistical manifolds are statistical models, *Journal of Geometry*, **84**, 83–93, 2005.
2) N.N. Chentsov, *Statistical Decision Rules and Optimal Inference*, AMS, 1982 (originally in Russia Nauka, 1872).
3) L.L. Campbell, The relation between information theory and the differential-geometric approach to statistics, *Information Sciences*, **35**, 199–210, 1985.
4) A. Cena and G. Pistone, Exponential statistical manifold, *Ann. Inst. Statistical Math.*, **59**, 27–56, 2007.
5) M. Grasseli, Dual connections in nonparametric classical information geometry, *Ann. Inst. Statistical Math.*, **62**, 873–896, 2010.

（あまり・しゅんいち，理化学研究所脳科学総合研究センター）

*3）この事情は，推定量のバイアスや平均二乗誤差行列がテンソルではなくて，座標系の取り方に依存する量であることによる．しかし，N が大きいときは，これらの量は漸近的にテンソルとなる．

科学と社会 Science & Society

第3回　国家・学問・戦争の諸相

科学は明治維新前後の日本で
どのようなものであると考えられたか

岡本　拓司

前回は，実験を方法として採用した学問がニュートン力学という成果を生み出し，天体の運動と地上の物体の運動を同じ原理によって説明することに成功した様子について述べた．実験を用いた学問は他の地域，他の時期にも現れてはいたが，世界を統一的に説明し尽くす可能性がこうした学問に期待されるようになったのは，ニュートン力学の誕生以降のことであった．その意味では，ニュートン力学の誕生こそが科学の誕生であった．

今回と次回は，誕生以降，2 世紀の間に発展を遂げた科学が，明治維新前後の日本で，どのようなものであると理解され，どのような過程を経て受け入れられていったかを論じたい．ただし，今日，科学が当然のようにして受け入れられている状況を基準にすると，こうした記述は，西洋の進んだ学問が，教育機関などで着々と受容されていく様子を描くことで終わってしまいかねない．一面では，たしかに事態の推移はそのようなものであったが，順調な受容にのみ注目したのでは見落としてしまうことも実際には多い．本稿では，この見落とされがちな部分も取り上げたい．具体的には，やや広く，西洋の文物の受容に伴って日本で起きた葛藤とでもいうべきものに目を向けることで，科学を受け入れることが惹き起こした思想上の問題の幾つかを取り上げることとしたい．

3.1 異なった文化が出会うとき

前回，科学が世界にいきわたったのは，西洋の諸国が世界各地に進出し文化上でも強い影響力を持ったためであり，科学が他の領域の学問に比べて特に高い普遍性をもっていたためではなかったのではないかという疑問も成立し得ることを指摘した．この議論は次回でも取り上げるが，今回はまず，幕末・明治維新期の人々が科学をどのようなものであると観察したかを見て，考える材料とすることから議論を始めよう．

江戸時代にも蘭学として，さらに後には洋学として，西洋の学問が日本に到来していたことはよく知られている．しかし，本稿で幕末から話を始めるのは，この時期には，それ以前にはない緊迫感をもって学問についての議論がなされていることに注目したためである．アヘン・アロー戦争で清国が敗北し，また日本にもアメリカの東インド艦隊が M.C. ペリー（1794–1858）に率いられて浦賀に現れると，「列強」と呼ばれたいくつかの西洋諸国は，その圧倒的な軍事力で日本の独立を脅かす存在であると理解されるようになった．西洋の学問をどう理解するかという課題も，この衝撃の下では，国家の存亡に関わるものとなった．

異なった文化圏の間で，一方が他方に対して優

位であることが最も分かり易く示されるのは，軍事的な不均衡がある場合である．人間の精神に関わる事物では，直接は優劣の比較は難しく，例えばキリスト教と仏教のどちらが優れているかを示すことはほとんど不可能である．キリスト教の基準に従えばキリスト教が優位になり，仏教の基準に従えば仏教が優位になるであろうが，両方を比較して優劣を論ずることができるような基盤を準備することは難しい．一方，どの文化圏であれ，それを支えているのは人間であるから，生物としての人間そのものに訴えかける要素に注目すれば，文化圏の間での比較が可能になるかに思われる基盤を作ることもできる．例えば，人間は生物として甘いものに弱く，どの文化圏も結局は砂糖の誘惑には勝てなかった．砂糖を安く大量に作ることのできる文化圏は，その点では優位であり，輸入をせざるを得ない劣位に置かれた国々は国産化を目指した[1]．また，砂糖の国産を可能にするような産業全般の進展も目指した．同じ食べ物であっても，獣の肉となるとただちに文化による拘束を受けることとなり，どの文化圏でもこれを食べるわけではなく，または豚肉はよいが牛肉は不可，あるいはその逆といったことが起こり得る．生物としての人間に訴えかけるところの大きい食べ物であっても，そのすべてが文化圏を越えた基盤となるわけではない．人間（の集団）に対する文化による拘束は，このように強いものなのである．

文化圏を越えて意味をもつものは，ある文化圏が他の文化圏に，自身の要求を受け入れさせたい場合にも用いることができる．砂糖程度であればなくとも生存には関わらないが，石油や天然ガスなど，生存に不可欠の資源は，こうした手段として用いられることはある．

軍事的な要素は，集団としても個人としても，人間の生の存続に直接訴えかけるという性格をもち，またその本質が文化によって縛られる度合いは食べ物などに比べても小さいために，文化圏の間の壁を越えて，その優劣を決める基準となり易い．多くの文化圏には，戦い方に固有の礼儀はあるが，予期せぬ方法で攻めてくる圧倒的に強い異教徒に，「それは卑怯だ」と叫んでも，勝敗には影響しない．軍事上の優劣は，文化を越えて比較でき，従って，軍事という方面で文化間の壁が破られ，一方の文化が他の文化を圧倒することは多い．現在我々が日本で享受する人権や民主主義といった価値が，現実にこの地に定着するまでには，第二次大戦での敗北が必要であったように，実際に戦争を行って敗れれば，勝者の価値観や主張を受け入れざるを得なくなることがある．大規模な戦争を行えば，想定される被害は勝者にも敗者にも小さくないことがあり，そうした想定がうまく説得力をもてば，戦わずして，一方の軍事力が他方を圧することはある．その場合も，優位にある地域の要求を劣位にある地域が受け入れざるを得なくなることがあり，また劣位の地域が優位の地域の文物を取り入れようとすることがある．

幕末に西洋の学問が真剣な検討の対象となったのも，西洋諸国が高い軍事力をもって日本の存立を脅かしたためである．これ以前の平和な時期には，西洋の学問の中でも，やはり文化を越える度合いの高い分野である医療・医学が関心を集めていたが，幕末には，蘭学・洋学の吸収は軍事方面の知識に力点を置くこととなり，また，日本を脅かしつつある西洋の力の源として，この地域の学問の特徴が議論されるようになった．

簡潔に言ってしまえば，日本が科学に積極的な関心を持ち始めたのは，西洋の軍事力を脅威と感じたためである．その意味では，まずは，西洋が軍事力・工業力で他地域を圧倒しながら世界全体へと拡大していく中で，日本も科学を受け入れていったと言ってよい．つまり西洋に受容を強制された側面はある．しかし，もう少し詳しく当時の人々の観察を検討してみよう．

3.2 科学は日本にあったか

万延元年（1860年），西周（1829–1897）は，藩主の亀井侯に宛てた建言を書いたが，そこには彼が観察した西洋の学問・文物の本質が，簡潔な言葉で記されている．

西によれば，西洋の淵源である学術や国家の典章，および文物は，「悉く実測ニ出テ」いるという．古くから日本に元などの外国が攻め入ることはあったが，いずれもただ強大な兵力をもって力押しで来たのに対し，いま日本にやってきている西洋諸国は，「大艦を制し大砲を鋳立，或は轍路を敷き，或は伝信機を施」すなど智巧を極めている．これが西洋が世界に進出することを可能にした理由であり，日本も西洋の学術を摂取する必要があると西は説く．主張自体は，軍事・産業において優れた西洋の文物を取り入れよというもので，新奇な点はないように見えるが，西洋の文物が「実測」を基礎にしており，またそうした学問や文化が，日本のみならず中華文化圏にはなかったと述べている点には，注意深い観察眼を見ることができる[2)]．西洋の力に圧倒されていることは間違いないが，西は，それを支える文物の基礎に，「実測」という，西洋以外の文化圏にも広く受け入れることを迫る要素があることを見抜いていた．

西洋の学問の受容の中心としては，既に幕府は安政2年（1855年）に蕃書調所を設け，翻訳等を行っていた．しかしここでも，書物を中心とする学習では不十分であることが理解されるようになっていた．蕃書調所は洋書調所となり，ついで文久3年（1863年）に開成所となったが，校名が変更されたのは，「書上之研究斗ニてハ」不十分であり，「実事実物」に当たり，「験察之工夫」を行う必要があるためであった．具体的には，「物理考究器械製造」をも行う場所として，開成館あるいは開成所という名称が提案されている[3)]．書物による知識の受容は以前より行われてきたが，単なる紹介より先に進もうとすれば，それを越えた実地の作業が必要であった．西洋の学問の本格的な吸収が喫緊の課題となると，翻訳学問であった蘭学・洋学の段階にとどまっていては覚束ないことが明らかになったのである．

主として書物を通じたものであっても，洋学の伝統の中で，日本人がある程度高度な知識を得ていたことは間違いない．例えば福沢諭吉（1835–1901）は，万延元年に，軍艦奉行木村摂津守（喜毅．1830–1901）の従者として渡米したが，日本人には珍しかろうと考えたアメリカ人が，電信や電気鍍金，砂糖の製造過程で真空を用いて沸騰を早める様子などをサンフランシスコで得意げに案内するのを，その程度のことは数年にわたって勉強済みであると冷ややかに眺めている[4)]．意欲的な知識人には，書物を通じたものであっても，西洋に関する充分な理解はあった．しかし，日本には伝統的に存在していなかった西洋型の学問を新たに起こすにはまた別の作業が必要である．福沢自身，後半生には，その時間や労力の大部分を，こうした方面に費やすこととなった．

日本に，西洋型の学問がなかった理由については，前島密（1835–1919）が具体的な指摘を行っている．彼は，開成所と関わりをもつようになっていた慶應2年（1866年）暮，徳川慶喜（1837–1913）に宛てて「漢字御廃止之議」を書いたが，その主旨は，国民全体に教育をいきわたらせるために，学習の妨げとなっている漢字を廃したいというものであった．背景には，西洋から新たにやってきた学問と比較した際に感じざるを得ない，従来の日本の学問に対する不満があった．前島によれば，従来の学問は，「仁義」や「明徳」，「治国平天下」といった「老成学者」や「老練為政家」も理解に苦しむことがらを論ずるばかりであり，しかもこれを素読を通じて学ぶために，やがて内容は忘れ去られてしまう．学問は「道徳」に関わるもののみと考えられており，「物理の学の如きは古来全く教育上の物とせず」，また「技術上の教育」は「職工の賤業」とし「学校の門」には入れてこなかった．このことが「貧弱未振」という日本の現状を招いたというのである[5)]．

幕末に，西洋諸国の圧迫に抗する方法を模索しながらも，彼らの学問の特徴にも目を向けた人々は，「実測」や「器械」がその基礎であることに気づき，同様の学問は日本にはなかったことも理解していた．主として書物経由ででき上がった蘭学や洋学の伝統では，この欠を補うには充分ではないことも痛感していた．実測や器械を用いた知識が日本になかったわけではないが，それは「職人」

の世界のものであり，日本や中華文化圏の学問には含まれていない．この地域で伝統的に学問と看做されてきたものは，道徳や政治，文学，歴史などであった．しかし，現実に職人の世界の方法で作られた学問を目の当たりにしてみると，そうした学問が，文化圏の違いを越えてもつ普遍性や汎用性は，否定のしようがなかった．

明治維新後，日本と西洋をさらに詳細に比較するための条件が整った後も，両者の学問の違いについての観察は大きくは変化しなかった．

明治4年（1871年）から6年（1873年）にかけて，遣欧米全権特命大使に随行してアメリカとヨーロッパを巡覧した久米邦武（1839–1931）は，アメリカ到着後間もない頃，福沢同様サンフランシスコで，それまでの見聞をもとに東洋と西洋の比較を試みている．西洋人は外交を楽しむが東洋人は内向的であるなど，両者の「風俗性情」は全く正反対のようであり，学問においては，西洋人は「有形ノ理学」に励み，東洋人は「無形ノ理学」に篤いというのが久米の感想である．西洋には植物園や動物園があるのに対し，日本には植木屋や禽獣観場があり，外貌は似ているようであるが，規模や目的は異なっている．西洋でこれらが設けられるのは，人々の知見を広くし，学知を進めるためであり，莫大な費用はかかるものの，別に「大利」があるので惜しまない．具体的にはこれらによって「有形理学」が進歩し，「農工商」に実益が生まれ，「富庶繁栄」がもたらされていると久米は述べる[6)]．実益に即して学問を理解しつつも，学問自体の違いを見落とさず，西洋のそれを「有形」と表現する観察は，幕末の知識人たちの感想から大きく変化はしていない．

遣欧米使節が巡覧で国外にある間，国内では大きな変革は行わないことを約束していたいわゆる留守政府が，違約して行った大きな変革の一つが，明治5年（1872年）の学制の制定であった．学制は全国規模で初等教育から高等教育に至る機関を整備することを目指すものであったが，その精神を宣言し，「必ず邑に不学の戸なく家に不学の人なからしめん事を期す」の一文で有名な「被仰出書」には，設けられて間もない文部省に集った当時の人々の学問観を表現した箇所がある．

被仰出書が称揚する学問とは，社会の中で人間が身を立てて行くために必要な知識であり，具体的には「日用常行言語書算」から「士官農商百工技芸」，「法律政治天文医療」に及ぶ．被仰出書は，従来，学問は，「士人」より上の階級が学ぶべきものとされ，「農工商及婦女子」は関わりを持たなかったことを嘆く．そして，士人以上でまれに学ぶ者も，学問は国家のためのものであると誤って理解しており，その内容は「詞章記誦の末に趨り空理虚談の途に陥り」，議論は高尚に見えても内実に乏しいものであったと指摘する．明治初年の国家の表明する教育方針が，国家のための学問を否定している点が印象的であるが，反面それは，維新以前には存在しなかった，内実の豊かな，人々が社会で自立するための学問に基づく教育を今後普及させていくという意思の，やや肩に力の入った表現であったとも理解できる．それにしても，学問の名に値するものはこれまでの日本には存在しなかったと最も明瞭に言い切ったのが，在野の知識人ではなく文部省であったことには驚かされる．

以上のような流れを見ると，幕末から明治初年に至るまで，西洋の脅威に怯えながらも，それを支える西洋の学問が「実測」，「器械」，「有形」を重視する点で普遍性をもっていることを理解し，従来日本にはなかったそのような学問を定着させようとする姿勢は，明治新政府を含む多くの領域で共有されていたように思われる．こうした学問やそれに基づく教育が定着していくのはごく自然な成り行きであったかのようにも感じられる．しかし，実際には，当時の日本に存在したのは，そのような方向性ばかりではなかった．

3.3 国学・漢学・洋学

幕末から維新期まで一貫して，西洋諸国が日本の独立を脅かす存在であることと，その力の根源である西洋型の学問が日本にはないことが意識されていたのであるから，この事態に対応するため

に起こされた維新の後，国家はすぐにでも西洋の学問の採用や育成に着手すべきであったように思われる．趨勢としては確かにそうであった．しかし，すべての人々がこれを支持したわけではなかったことは，当時の日本の状況を検討してみれば容易に理解できる．

現実的な問題として，明治維新の主体となった武士（下級武士が多い）の基本的な教養は，学制が学問とは看做さないような，四書五経を中心とした漢学であった．その内容は，西洋の科学は含まないものの，政治・倫理・歴史・文学などからなり，一国の統治を行う者が身につけるべき素養として，広く日本で学ばれてきた伝統があった．また，幕末に勢いを得て，明治維新が実現するにあたって無視できない役割を果たしたのが国学であった．賀茂真淵（1697–1769）・本居宣長（1730–1801）から平田篤胤（1776–1843）を経て大成された国学は，朱子学を官学とする幕府からの弾圧を受けながらも町人社会を中心に展開し，幕末に尊皇攘夷の動きが強まる中で次第に勢力を拡大し，明治維新で天皇を中心とする古代に倣った政体が実現すると，様々な系統の国学者たちが新たな国家において学問と教育の中心となるべき機会を窺うに至った[7)]．

それでも，西洋諸国の圧迫に対応すべき日本の状況を考えると，教育や学問を漢学や国学に占拠させる可能性は全くなかったように思われる．しかし反面，日本の存立を守るために行った明治維新の結果，文明開化の名の下に，習俗から思想に至るまでのあらゆる領域が西洋化するのでは，わざわざ大変革を行って，西洋からいったい何を守ろうとしたのかが問題となり得る．さらにまた，明治初年には広く気づかれることはなかったが，日本が入っていこうとした西洋型の文明圏では，民族や地域の固有の文化や伝統がそれぞれの国家の形成の根幹にあり，西洋に倣おうとすれば，それに相応して日本の歴史と文化を顧みなければならなくなるという事態にもなった．自分たちが参加してきたわけではない西洋圏の文化を取り入れようとする日本にとって，学問と教育の基本をどこに据えるかという問題の解決は，決して容易ではなかった．現在に至るまで，誰もが納得する解決には至っていないともいえる．

明治初年には，状況はまだそれほどの深みのある様相は呈していなかった．しかし，表面的には大混乱が生じていた．明治維新直後の行政組織の変遷はめまぐるしかったが，教育に関しては，明治2年（1869年）より，省と並ぶ行政組織と教育機関を兼ねた「大学校」が管轄することとなった．大学校は教育機関としては昌平坂学問所の後身であったが，行政組織として，旧幕府の開成所の後身である開成学校と，やはり旧幕府の医学所の後身である医学校と病院の管理などを行った．昌平坂学問所は漢学主体の学校であったが，大学校となると，平田篤胤の養子で京都にいた平田鉄胤（1799–1880）らが招かれて勢力をなし，国学派と漢学派の間で熾烈な主導権争いが始まった．このため大学校は一時休校も同然となった．

事態収拾のために，大学校を大学，開成学校を大学南校，医学校を大学東校と改称し，大学に対して洋学系の大学南校と大学東校を並立させるという方策がとられたが，明治3年（1870年）2月に，国学・漢学・洋学の別を廃して，教科別の組織編制とする「大学規制」が定められると，今度は国学派と漢学派が相携えて洋学派を排撃する挙に出た．この事態は容易に収まらず，同年7月，大学本校は閉鎖され，幹部と，平田など国漢学系の関係教官が罷免された．洋学の採用どころか，維新後の教育政策全般が停止する危機が生じていたのである．

政府部内における教育行政の混乱は，1年後の明治4年（1871年）7月に，学校から切り離された官庁として文部省が設立されるなどの施策によって一応は収まった．解決策は，かねてから教育行政に関しても腹案のあった江藤新平（1834–1874）の計画を採用したものであったようである．江藤は文部卿のいない文部省に文部大輔として17日間在職したのみであったが，さらに翌年制定される学制の大枠までをも準備した[8)]．江藤の大方針は，教育行政から国漢学系を排して官僚と洋学者を残し，彼らに西洋流の学問と教育の制度を築かせる

というものであった．江藤が去ったあと文部卿となった大木喬任（1832–1899）はこれを引き継いで手堅く完成させ，明治5年に学制を公布した[9]．

学制の公布は，国家が教育制度に西洋の方式を採用したことを明らかにしていた．既に見た被仰出書の内容がその精神を示しており，また個別の教科においても，例えば和算が教科目から外されるといった明確な措置がとられた．具体的な教育制度の基礎として，全国は八大学区に分けられ，さらに一つの大学区は32の中学区に分けられ，また中学区は210の小学区に分けられた．それぞれの学区に一つずつ，大学校，中学校，小学校が置かれる予定であった．

現実的には，費用の負担を地方や国民に求める学制の貫徹は困難であり，また規定通りの大学校・中学校・小学校の設立は，当時の国力・民力から言って不可能であった．第一大学区に於いてさえ，大学校の条件を満たす教育機関はなく，開成学校がそれに次ぐものと認められたに過ぎなかった（図3.1）．国民の公教育への参加意欲も，経済的な負担への懸念もあって，政府の期待するとおりには高まらなかった．西洋式の教育を初等教育から採用することを明示した点に学制の意味はあったが，制度

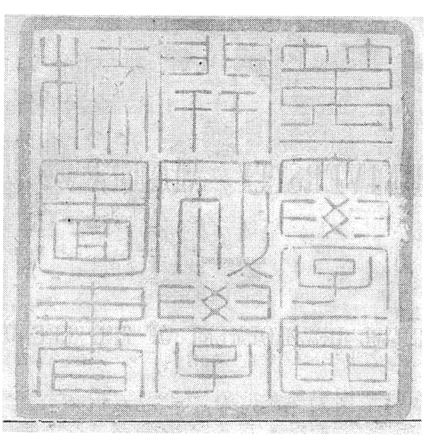


図3.1　第一大学区開成学校の蔵書印（*University algebra: embracing a logical development of the science, with numerous graded examples*/by Charles Davies, 東京大学駒場図書館所蔵）．この名称が用いられたのは，明治6年から7年にかけての短い期間であった．

そのものは実現せず，明治12年（1879年）には学制は廃止され，より現実に即した教育令が公布された．しかしこの教育令も改訂を要し，翌年に改正，明治18年（1885年）に再改正されるなどの事態となった．

3.4 明治天皇と教育

教育と学問の大方針をどう定めるかという問題は，国漢学派の教育行政からの排斥で完全な解決を見たわけではなかった．教科の内容に西洋のものが採用される点については次第に広い了解が成立していったが，教育中の主眼，特に道徳教育の位置に関しては，明治天皇（1852–1912）やその教育や補佐に当たった侍講・侍補などを中心とする勢力から，西洋諸国に倣って国家が人民の良心に立ち入ることを避けようとする政府の教育政策に対する反発があった．

反発が主として道徳に関するものであったのは，旧世代の基本的な素養である国漢学が道徳を主題としており，これに基づいて，天皇が君徳をもって民の手本となることを彼らが理想としたという積極的な理由があったためであるが，反面，新政府の多端な所轄事項のうち，天皇周辺の実力で関与できるものは，外交や産業振興ではなく教育政策程度であり，教育の中でも，科学や海外の事情に関わるものについて意見をさしはさむことには，大きな困難が伴ったという消極的な事情もあったものと思われる．

明治天皇とその周辺の元田永孚（1818–1891）や佐々木高行（1830–1910）などの宮中派が国政に積極的に関与し始めるのは，大久保利通（1830–1878）の暗殺後である．暗殺者の斬姦状に，政令が天皇の聖旨から出ているのではなく，要路の官吏数人の臆断専決によるものであるとの指摘があったことに刺激を受けたためであった[10]．その後も続く教育政策への容喙が最初に顕著になるのは，教育令の制定をめぐってのことである．元老院での教育令案の審議で，修身を教科の筆頭に置くことを主張した佐野常民（1823–1902）の主張が無視さ

れ，大久保亡き後，政府の主宰者となりつつあった伊藤博文（1841–1909）が，むしろ道徳に関する規程を削除するなど，佐野や宮中派の意向に反する修正を行ったことに，宮中派は強く反発した[11)]．

反発は，元田が起草し，明治天皇が内閣に示した「教学聖旨」として具体的に示された．教学聖旨は，教育の大本について記した教学大旨と，具体的な施策を述べた小学条目二件からなる．教学大旨は，「仁義忠孝」が教育の基本とされるべきであり，現在のように文明開化に浮かれて洋風がはびこるようでは，「君臣父子ノ大義」を知らぬ者ばかりになると危惧されると主張する．小学条目では，まず，仁義忠孝の心を育てるため，小学校に「忠臣義士孝子節婦」の「画像写真」を掲げることが提案される．さらに，前年秋の明治天皇の学校巡覧の際の経験に基づき，「農商ノ子弟ニシテ其説ク所多クハ高尚ノ空論ノミ」，「善ク洋語ヲ言フト雖トモ，之ヲ邦語ニ訳スル事能ハス」といった事例が紹介され，こうした輩は成長してももののの役には立たず，却って知識を誇って「長上ヲ侮リ，県官ノ妨害トナル」であろうから，農商には実地に基づき本業に即した教育を行うべきであると主張される．

教学聖旨に対し，明治12年（1879年）9月，伊藤は井上毅（1844–1895）に起草させた「教育議」をもって反論した[12)]．教育議は，教学聖旨の指摘する道徳の乱れについては，鎖国を止め封建を廃するといった大変動に伴うものであり，維新以来の教育政策の誤りではないが，改善策はやはり教育に求めるべきであり，しかし「速効」を求めてはならないと主張する．また，国教をたてて道徳の規範とするようなことは，「賢哲」が現れて自然になされるべきであり，政府が関わる問題ではないという．教学聖旨が憂う若年層の道徳の乱れは，彼らの学ぶべき内容を考慮することで解決できると提案している．すなわち，政談を好む若者の多くは「漢学生徒」であるが，彼らは洋書を読んでも「欧州政学」の余流に棹差して空論をもてあそぶことになる．そこで，高等教育の主体を，「工芸技術百科ノ学」，即ち「科学」とすれば，彼らの中の「浮薄激昂ノ習」は消えて行くであろうというのである．

教育議は教学聖旨に対する全面的な反論であったが，明治天皇も元田も，この程度の反論に屈することはなかった．明治天皇に教育議への対応を問われた元田は，反論を「教育議附議」として提示した．これもまた，教育議の提案の一つ一つに対して反駁を加える徹底的なものであり，具体的には，新政府が採用を進めているかに見える西洋の修身学は「耶蘇教法」に基づくので従うことはできず，四書五経と国書を倫理教育に用いること，教育の要点は科学にとどまらないので，高等教育においても「道徳経綸」を要請すべきこと，国教を建てる賢哲とは，「君ト為リ師ト為ルノ御天職」たる明治天皇であり，また内閣にもそれに相応しい人物があることなどが述べられている．

元田の主張は古色蒼然たるものに見えるが，実際には，易姓革命を認める漢学を基礎としながら，万世一系の天皇の統治に道徳的な根拠を持たせるという，明治維新によって生じた政治状況に適応した柔軟性ももつ説であった．しかし，大久保亡き後の国家の運営に頭を悩ませ，依然として西洋の文物の定着に腐心するこの時期の伊藤が，そこに何であれ採るべきものを見出すことはなかった．

なお，教学聖旨中，小学条目に述べられていた，外国語をよく話す生徒に明治天皇が出会ったのは，明治11年（1878年）10月4日，金沢の公立中学師範学校においてのことであった．『石川県史』の記述によれば，県令の先導で巡幸の一行が化学室に入ると，二人の生徒が英語の対話によって電信の原理を講じ，また実験を天皇に見せたが，天皇が命じて日本語によって再演させたという[13)]．天覧があるというので，英語による実演を見せようと万端の準備を整え，外国語の会話も実験も首尾よく終わり，生徒も教師も周囲の人々も安心して賞賛の言葉を期待しているところへ，「日本語でもう一度やれ」と命ずることができる地位にあったのは，明治天皇のみであったと思われる．その地位にある人物が，実際に，国家が挙げて西洋の文物の吸収に邁進する中，日本語による再演を遠慮

なく要望する性格の持ち主であったことが，例えば西洋語の術語を日本語に直し，日本語の教科書を著作・出版する動きに影響を与え，日本語による科学や工学の教育の早期の実現をもたらした可能性も，皆無であるとは言い切れないようにも思われる．

今回は，幕末・明治維新期の日本の知識人が，科学を中心とする西洋の学問の大半が日本の伝統にはないものであると理解し，その欠を埋めるべく教育や学問の指針を定めようとしたこと，しかし，明治維新には伝統的な学問や道徳の復興という側面もあったことから，西洋の受容には各所からの反発もあったことを見た．国漢学派と洋学派の衝突や，元田と伊藤の論争に見られるような対立は，教育令の時期よりあとも，教育や学問が関わる場面には現れてくる．その帰趨は一体どのようなものだったのであろうか．またそれは，科学という西洋由来の学問を担って研究の道に進んだ人々にも，何らかの影響を与えたのであろうか．次回はそうした問題を議論したい．

なお，図3.2は，今回取り上げた時期よりやや後，明治22年（1889年）に制定された第一高等中学校の校旗，護国旗である．文を表すオリーブと武を表す柏（西洋柏）の組合せの中に，国の字が入っている．文と武の組合せは『史記』の「文事ある者は必ず武備あり」に由来するといわれているが，それらの象徴としては西洋の伝統に根ざす植物が用いられている．中の国の字は，文部大臣の森有礼（1847–1889）が国家的精神涵養のために入れさせたという．この紋章には和漢洋すべての要素が網羅されていることになる．

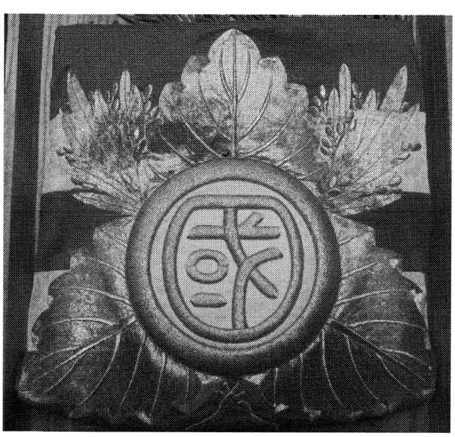


図3.2　護国旗．東京大学駒場博物館蔵．

参考文献

1) Elizabeth Abbott, *Sugar: A Bittersweet History* (London; New York: Duckworth Overlook, 2009)〔エリザベス・アボット著，樋口幸子訳『砂糖の歴史』（河出書房新社，2011年）〕.
2) 大久保利謙編『西周全集』，第三巻（宗高書房，1966年）.
3) 倉沢剛『幕末教育史の研究』一（吉川弘文館，1983年）.
4) 福沢諭吉『新訂福翁自伝』（岩波文庫，1978年）.
5) 『前島密　前島密自叙伝』（日本図書センター，1997年）.
6) 久米邦武編・田中彰校注『特命全権大使米欧回覧実記』一（岩波文庫，1977年）.
7) 大久保利謙『明治維新と教育　大久保利謙歴史著作集4』（吉川弘文館，1987年）.
8) 国民教育奨励会『教育五十年史』（民友社，1922年）.
9) 伊藤彌彦編『日本近代教育史再考』（昭和堂，1986年）.
10) 笠原英彦『天皇親政』（中公新書，1995年）.
11) 森川輝紀『教育勅語への道』（三元社，1990年）.
12) 国民精神文化研究所『教育勅語渙発関係資料集』第一巻（1938年）.
13) 『石川県史』第四編（石川県，1931年）.

（おかもと・たくじ，東京大学大学院総合文化研究科）

特　集（2012年3月号予告）

量子を操る

拡がりゆく量子の不思議な姿

本体952円

特　集（2012年1月号）

数学から物理へ，物理から数学へ

分野を越えた新時代の数理科学

本体952円

編集後記

クラシック音楽を演奏するにあたり，譜面を手書きやコンピュータで作る必要があり，元のスコアなどから五線紙に写譜するなどの作業をすることがあります．過去に，何人かの作曲家のものをやりましたが，中にある強弱記号の書き方一つとってもその作曲家自身の性格を表しているように感じました．聞いた話では，ある作曲家は指揮者もかねていたようで，おそらくオーケストラの奏者を信用していなかったのではないか，といったことが推測されているようです．

こうした体験もあり，曲に取り組む際にはその作曲家のその他の作品や出身国の同時代を含む他の作曲家の作品を調べて理解を深めるようにしました．場合によってはその作曲家の出身楽器なども関係してくるので，かなり重要な作業になります．実際にやってみるととても面白く，作曲家によっては当時の社会事情も出てきて，世界史の知識も深められます．

今回の特集で登場する様々な“古典”の創始者にもそうした事情はあるはずで，“古典”を読んで物理やその創始者自身の考え方を知ることができるのはもちろんのこと，場合によっては“古典”が創られた当時の背景や学問事情なども知ることができるのではないでしょうか．（R）

数　理　科　学　2月号

2012年2月1日発行

数理科学編集部
TEL. (03) 5474–8816
FAX. (03) 5474–8817

発行人　木　下　敏　孝

ホームページ　http://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は　sk@saiensu.co.jp　まで．

発行所　©　株式会社 **サイエンス社**　TEL. (03) 5474–8500（代表）
〒151–0051 東京都渋谷区千駄ヶ谷1–3–25　振替 00170–7–2387　(03) 5474–8600（広告部）

印刷・製本　三美印刷株式会社　山岡景仁